02/10/2008

CARLO CONCARI LUN. 14.30 - 16.30 carlo.concari@unipr.it

PAL. 4 UFF. 0521 - 905831 LAB. 0521 - 905813

TESTI:

- ALEXANDER SADIKU : CIRCUITI ELETTRICI
- DANIELE LIBERATORE : ELETTROTECNICA

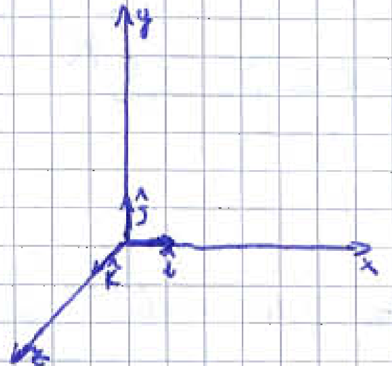
DISPENSE ONLINE 50 pagine

APPUNTI ONLINE 83mb

Esame scritto: 3 esercizi + orale facoltativo. NO compitini.

ELETTROTECNICA $\rightarrow$ dalle leggi di Maxwell alle loro semplificazione.

RIPASSO ELETTROMAGNETISMO



VERSORE $\rightarrow$ vettore di ampiezza unitaria

OPERATORE NABLA $\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x} \; \frac{\partial}{\partial y} \; \frac{\partial}{\partial z}\right]$

CAMPO SCALARE $\Phi(x,y,z,t) \rightarrow$ grandezza funzione dello spazio e del tempo SCALARE (numero)

CAMPO VETTORIALE $\vec{A}(x,y,z,t) \rightarrow$ hanno 3 componenti: VETTORE.

$$\nabla\Phi \doteq \vec{grad}\,\Phi = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right]$$ direzione lungo la quale Φ sta cambiando più velocemente.

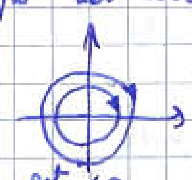
per definiz.

$$\nabla \cdot \vec{A} \doteq div\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$ quanto le linee del campo non sono parallele tra loro.

PRODOTTO SCALARE

$$\nabla \times \vec{A} \doteq \vec{rot}\,\vec{A} = det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}$$ tendenza del campo ad avvolgersi attorno ad un punto.

PRODOTTO VETTORIALE



rot ≠ 0

rot = 0 in O.

LAPLACIANO ∇^2

$$\nabla^2\Phi \doteq \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$ è SCALARE

$$\nabla^2\vec{A} \doteq \left[\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right), \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right), \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\right]$$

PROPRIETÀ DI ∇

1) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = div(\vec{rot}\,\vec{A}) = 0$

3) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{A}) = \vec{grad}(div\vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

2) $\nabla \times (\nabla \Phi) = \vec{rot}(grad\,\Phi) = 0$

4) $\nabla \cdot (\nabla \Phi) = div(\vec{grad}\,\Phi) = \nabla^2 \Phi$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Data una superficie S e un volume τ

$$\int_\tau div\vec{A}\, d\tau = \oint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\, ds$$

$\hat{n}$ ↳ versore normale all'elementino ds.

$\oint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\, ds$: FLUSSO DI $\vec{A}$ lungo la superficie S

TEOREMA DI STOKES

Data una linea chiusa l che sottende una superficie S

$$\int_S \vec{rot}\,\vec{A}\cdot\hat{n}\, ds = \oint_l \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$\vec{H}$ INTENSITÀ DEL CAMPO MAGNETICO $[A/m]$

$\vec{E}$ INTENSITÀ DEL CAMPO ELETTRICO $[V/m]$

Grandezze fondamentali con cui si definiscono i campi elettromagnetici

$\vec{B}$ INDUZIONE MAGNETICA $[T] = \left[\frac{V\cdot s}{m^2}\right]$

$\vec{D}$ SPOSTAMENTO ELETTRICO (non corrente) $[C/m^2]$

ρ DENSITÀ DI CARICA ELETTRICA $[C/m^2]$

$\vec{J}$ DENSITÀ DI CORRENTE DI CONDUZIONE $[A/m^2]$ quanta corrente scorre in $1\,m^2$ di sezione

POSTULATI DELL'ELETTROMAGNETISMO

$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$$

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ → DENSITÀ DI CORRENTE DI SPOSTAMENTO

$$\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = -\oint_S \vec{J}\cdot\hat{n}\, ds$$

LEGGE DI CONSERVAZIONE DELLA CARICA

$$\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = -\int_\tau div\,\vec{J}\, d\tau \Rightarrow \boxed{div\,\vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}}$$

ε COSTANTE DIELETTRICA

μ PERMEABILITÀ MAGNETICA

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

LEGGI COSTITUTIVE DEL MEZZO

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{div}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{B} = \text{costante} =$$

perchè all'inizio doveva essere così.

$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$ TERZA LEGGE DI MAXWELL

06/10/2008

$\int_\tau \operatorname{div} \vec{B}\, d\tau = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, ds = 0$ Il campo $\vec{B}$ non ha punti in cui convergono le linee di flusso (POZZI) o da cui partono (SORGENTI). Le linee di $\vec{B}$ sono SEMPRE chiuse. $\vec{B}$ è un campo SOLENOIDALE perchè $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\delta \vec{D}}{\delta t} + \vec{J} \qquad \operatorname{div} \frac{\delta \vec{D}}{\delta t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\delta \rho}{\delta t} \longrightarrow \frac{\delta}{\delta t} \operatorname{div} \vec{D} - \frac{\delta}{dt} \rho = 0 \rightarrow \frac{\delta}{\delta t}\left(\operatorname{div} \vec{D} - \rho\right) = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{D} - \rho = \text{COSTANTE} = 0$ $\hookrightarrow$ perchè in un istante doveva valere 0 e poi è rimasta costante.

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$ 4ª LEGGE DI MAXWELL

Leggi di Maxwell

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\delta \vec{D}}{\delta t} + \vec{J} \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Leggi costitutive della materia

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$\operatorname{div} \vec{J} = \frac{\delta \rho}{\delta t}$ Legge di conservazione della carica

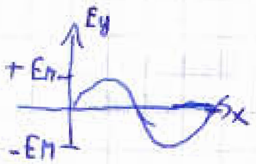
$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\delta \operatorname{rot} \vec{B}}{\delta t} \qquad -\nabla^2 \vec{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{\delta \operatorname{rot} \vec{B}}{\delta t}$$

supponiamo di essere nel vuoto

$\rho = 0$, $\vec{J} = 0$ $\quad \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \operatorname{div} \vec{D} = \frac{\rho}{\varepsilon} = 0$ ma $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ e $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\delta \vec{D}}{\delta t} +$

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{\delta^2 \vec{E}}{\delta t^2} \quad e \quad \nabla^2 \vec{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{\delta^2 \vec{H}}{\delta t^2}$$

Una possibile soluzione di queste due equazioni è:



$E_y = E_m \operatorname{sen}\left[\omega\left(\frac{x}{c_0} - t\right)\right]$ E orientato lungo y

$H_z = E_m \left(-\frac{1}{\mu_0 c_0}\right) \cdot \operatorname{sen}\left[\omega\left(\frac{x}{c_0} - t\right)\right]$ H orientato lungo z.

Equazione di un'onda piana che si propaga nello spazio a velocità $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$, cioè la velocità della luce.

Se i campi sono costanti, non si propaga nulla. Devo avere una variazione del campo per avere una propagazione.

CONDIZIONI DI REGIME QUASI STAZIONARIO → tutte le derivate sono trascurabili, ho una variazione molto bassa del campo: $\operatorname{rot}\vec{E} \simeq 0$, $\operatorname{rot}\vec{H} \simeq \vec{J}$...

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} \simeq 0 \\ \operatorname{rot}\vec{H} \simeq \vec{J} \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ \operatorname{div}\vec{D} = \rho \\ \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \\ \operatorname{div}\vec{J} \simeq 0 \end{cases}$$

Si applica il R.Q.S. nel caso in cui ci siano frequenze basse e circuiti piccoli.

Se ho alta frequenza, quando il generatore genera il picco alto, la resistenza analizza il picco basso con verso opposto, quindi ho propagazione costruttiva. Se ho resistenza bassa ho propagazione distruttiva ($\simeq 0$).

$\Delta t = \frac{L_{MAX}}{c_0}$ $\boxed{\omega << \frac{2\pi c_0}{L_{MAX}}}$ CONDIZIONE PER REGIME QUASI STAZIONARIO → dipende dalle dimensione del circuito

ESEMPIO

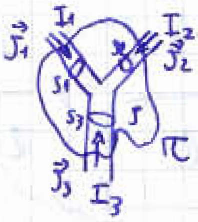
$f_{ENEL} = 50\ Hz \Rightarrow \omega_{ENEL} \simeq 314\ \frac{rad}{s}$ $\lambda = \frac{2\pi c_0}{\omega} \simeq 6000\ km$ se $L_{MAX} << 6000\ km$ sono in R.Q.S.

La trasmissione di energia avviene SOLO per conduzione.

CONSEGUENZE DEL REGIME QUASI STAZIONARIO

- $\operatorname{div}\vec{J} = 0 \Rightarrow J$ è un campo solenoidale (no pozzi, no sorgenti)

$\int_S \vec{J} \cdot \hat{n}\, ds = \underline{costante} = I$ ← corrente



$\oint_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,ds = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_n I_n = 0}$ somma delle correnti entranti uguale a 0 $\rightarrow$ **1° LEGGE DI KIRCHHOFF**

$I_1 + I_2 + I_3 = 0$ nell'esempio.

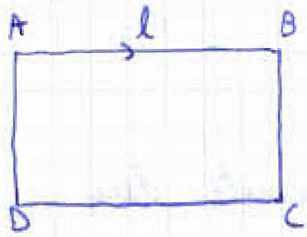
• $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$ $\quad \underbrace{\int_S \mathrm{rot}\,\vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = \oint_l \vec{E}\cdot dl}_{\text{TEOREMA DI STOKES}} \Rightarrow$ uguale a 0. $\quad \oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,V \rightarrow$ potenziale elettrico

$\int_A^B \vec{E}\,d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}\,d\vec{l}' = V_A - V_B$ DIFFERENZA DI POTENZIALE

Il campo $\vec{E}$ è irrotazionale e conservativo.

$\int_B^A \vec{E}\,d\vec{l} = V_B - V_A \quad \overset{+}{\Rightarrow} 0$



$$\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}\,d\vec{l} + \int_B^C \vec{E}\,d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}\,d\vec{l} + \int_D^A \vec{E}\,d\vec{l} = \cancel{V_A} - \cancel{V_B} + \cancel{V_B} - \cancel{V_C} + \cancel{V_C} - \cancel{V_D} + \cancel{V_D} - \cancel{V_A} = 0.$$

2ª LEGGE DI KIRCHHOFF $\quad \boxed{\sum_n \Delta V_n = 0}$ La somma delle d.d.p. su una maglia chiusa è uguale a 0.

09/10/08

LEGGE DI OHM IN FORMA LOCALE

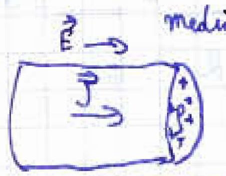
$\xrightarrow{\vec{E}}$ $\quad \vec{F} = \vec{E}\cdot e$

$\overset{\vec{F}}{\longleftarrow} \underset{m}{e^-}$ $\quad \vec{F} = m\cdot\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \overset{\text{carica negativa}}{-}\dfrac{\vec{E}\cdot e}{m}$

La conduzione non avviene nel vuoto, ma in un conduttore, in cui l'elettrone andrà prima o poi a sbattere contro una parete del cristallo.

$\tau \rightarrow$ TEMPO MEDIO FRA DUE URTI degli elettroni.

$$\vec{V}_M(\tau) = \vec{V}_0 + \underset{\text{media}}{\frac{1}{\tau}} \int_0^\tau \frac{e\cdot\vec{E}}{m}\,t\,dt \overset{\text{VELOCITÀ}}{=}_{\text{MEDIA}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{e\cdot\vec{E}}{m}\cdot\tau$$

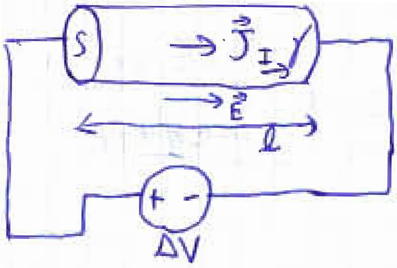


$$\vec{J} = \rho\cdot\vec{V}_M = -\frac{1}{2}\rho\cdot\frac{e\cdot\vec{E}}{m}\cdot\tau \doteq \gamma\cdot\vec{E}$$

$\hookrightarrow$ CONDUCIBILITÀ ELETTRICA DEL MEZZO $= -\dfrac{1}{2}\rho\cdot\dfrac{e}{m}\cdot\tau$

$\boxed{\vec{J} = \gamma\cdot\vec{E}}$ LEGGE DI OHM IN FORMA LOCALE $\quad \gamma = \dfrac{1}{\varrho}$ $\varrho \rightarrow$ RESISTIVITÀ ELETTRICA $\neq$ DENSITÀ DI CARICA ρ !!

$\hookrightarrow \vec{E} = \varrho\cdot\vec{J}$ $\quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RAME}}}{\gamma_{Cu}} = 5,8\cdot10^7\ \Omega^{-1}m^{-1}$ $\quad \gamma_{TEFLON} = 10^{-20}\ \Omega^{-1}m^{-1}$



$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V \qquad \overset{\text{modulo}}{I} = J \cdot S = \gamma \cdot E \cdot S = \frac{\gamma \cdot E \cdot S \cdot \ell}{\ell} = \gamma \cdot \frac{S}{\ell} \cdot \Delta V$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V = R \cdot I} \qquad R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\ell}{S} = \rho \cdot \frac{\ell}{S} \qquad \frac{1}{R}$$

LEGGE DI OHM IN FORMA INTEGRALE

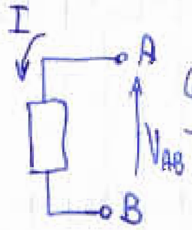
II LEGGE DI OHM

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \theta)$$

ρ_0 → ρ A 0°C; ρ → RESISTIVITÀ; α → COEFF. DI TEMPERATURA; θ → TEMPERATURA IN °C

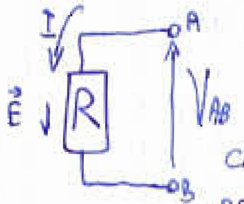
Gli atomi vibrano più velocemente a temperatura più alta.

BIPOLO ELETTRICO



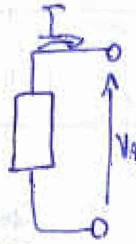
Scatoletta nera accessibile dall'esterno tramite due morsetti A e B.

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

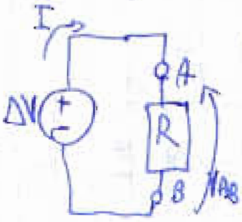


$$V_{AB} = R \cdot I$$

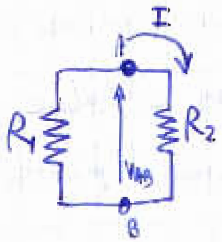
CONVENZIONE DELL'UTILIZZATORE



CONVENZIONE DEL GENERATORE



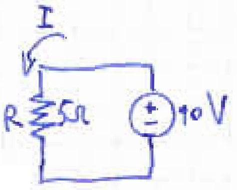
$$V_{AB} = \Delta V \qquad I = \frac{\Delta V}{R}$$



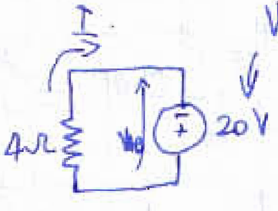
Per R_1 uso la convenzione del generatore mentre per R_2 quella dell'utilizzatore

$$V_{AB} = R_2 \cdot I = -R_1 \cdot I$$

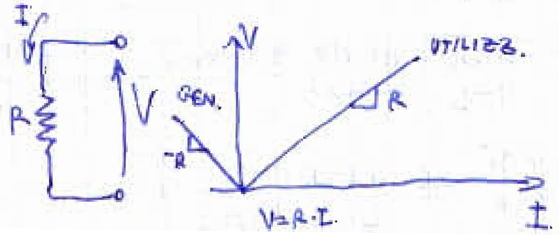
Esempi

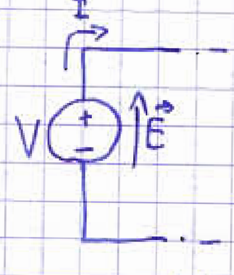


$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{10\,V}{5\,\Omega} = 2\,A$$



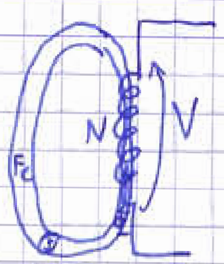
$$V_{BA} = -V_{AB} \qquad I = \frac{-V_{AB}}{R} = \frac{+20\,V}{4\,\Omega} = 5\,A$$





$\vec{E} \neq -\text{grad}\, V$ perchè il potenziale aumenta dove aumenta il campo elettrico $\Rightarrow$ non valgono le condizioni di regime q.s.

Il campo elettrico generato dal generatore non è conservativo $\rightarrow$ $\vec{\text{rot}}\, \vec{E} \neq 0$.
La corrente può essere mossa solo se da qualche parte non ci sono le condizioni di regime quasi stazionario.



$V = -\dfrac{d\Phi_c}{dt}$ LEGGE DI FARADAY $\quad \Phi_c = \Phi \cdot N$ ← n° spire

$\hookrightarrow \Phi = B \cdot S$ ← sezione

Creo un generatore elettrico.

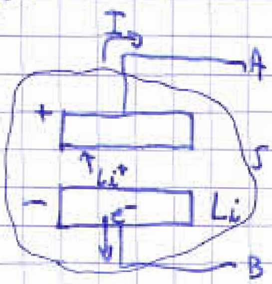
Per generare V ho dovuto violare le condizioni di regime quasi stazionario
$\vec{\text{rot}}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (forma locale di $V = -\dfrac{d\Phi_c}{dt}$).

$V_B = -\dfrac{d\Phi_c}{dt} = -N \dfrac{d\Phi}{dt}$

$\int_\ell \vec{E}\, d\vec{l} = V_{AB}$

Se aumento N e tengo costante Φ, $\int_{\ell'} \vec{E}\, d\vec{l} = V_{AB}' \neq V_{AB}$ perchè ho + spire

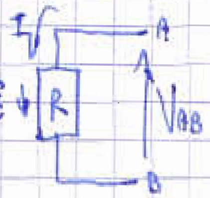
ACCUMULATORE AL LITIO



In regime q.s. $\text{div}\,\vec{J} = 0$, ma qui non avviene più perchè una carica sparisce

Su S le condizioni di quasi stazionarietà sono preservate e $\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n}\, dS = 0$

ENERGIA DISSIPATA DA UNA RESISTENZA



$V_A - V_B = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{l} = -\int_A^B \dfrac{d\vec{F}}{dq} d\vec{l}$

$(V_A - V_B) \cdot \underbrace{dq}_{\text{CARICA INFINITESIMA}} = -\int_A^B d\vec{F}\, d\vec{l} = dL$ lavoro infinitesimo fatto per spostare la carica $\qquad I = \dfrac{dq}{dt}$

$(V_A - V_B) \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{dL}{dt} \qquad V_{AB} \cdot I = P$ POTENZA DISSIPATA SULLA RESISTENZA

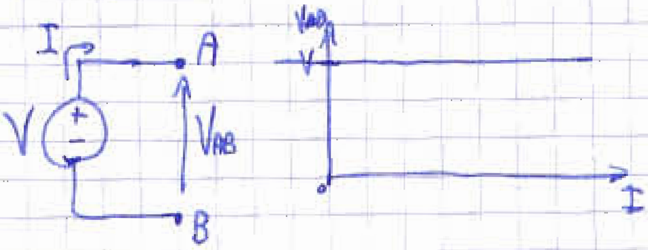
Ma $V = R \cdot I \Rightarrow \boxed{P = R \cdot I^2}$ o $P = \frac{V_{AB}^2}{R}$

SEZIONE FILO	I_{max}
1 mm^2	9A
4 mm^2	30A
10 mm^2	52A

I fili elettrici hanno una piccola resistenza interna (spesso trascurata) che fa sì che se percorso da una corrente elevata si scaldi.

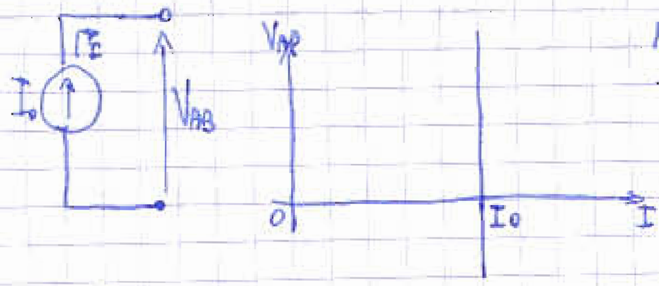
equilibrio termico della resistenza: tutta l'energia viene dissipata in calore.

GENERATORE IDEALE DI TENSIONE



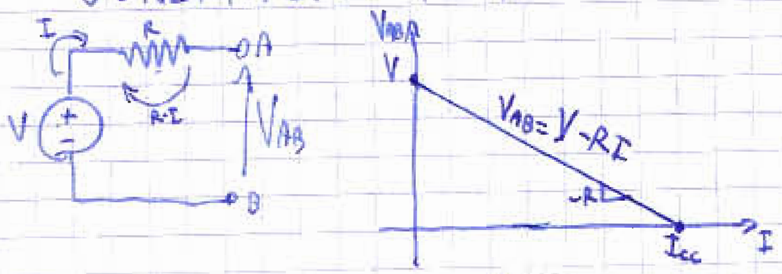
Fissa la tensione V_{AB} a un valore preciso V indipendentemente da quello che ci sia prima

GENERATORE IDEALE DI CORRENTE



Fissa la corrente I a un valore preciso I_0.

GENERATORE REALE DI TENSIONE



$I = 0 \Rightarrow V_{AB} = V$ nessuna caduta su R

$V - RI - V_{AB} = 0$ 2ª legge di Kirchhoff

$\Updownarrow$

$V_{AB} = V - RI$

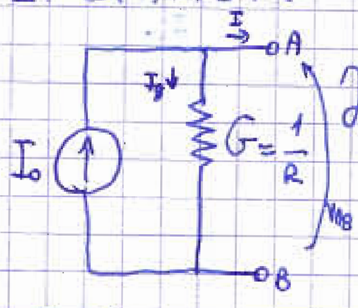
$V_{AB} = 0 \Rightarrow V = R \cdot I \Rightarrow I = \frac{V}{R} = I_{cc}$ CORRENTE DI CORTO CIRCUITO (I_{MAX})

collego A e B.

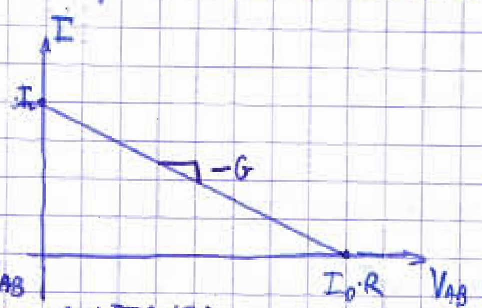
Essendo un dispositivo ATTIVO, la curva non passa per l'origine.

Modello della batteria / pila.

GENERATORE REALE DI CORRENTE



Ha in parallelo una resistenza/conduttanza $G = 1/R$



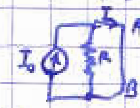
$I=0 \Rightarrow I_G = I_0 \Rightarrow V_{AB} = R \cdot I_G = R \cdot I_0$ TENSIONE A VUOTO

$I_0 = I + I_g$

$I = I_0 - I_g = I_0 - \frac{V_{AB}}{R} = I_0 - G \cdot V_{AB}$

↳ CONDUTTANZA

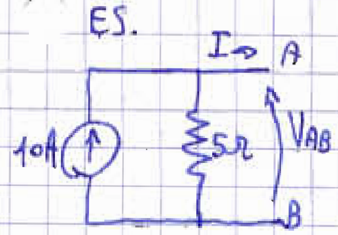
$V_{AB} = 0 \Rightarrow I_G = 0 \Rightarrow I = I_0$ CORTO CIRCUITO I MORSETTI



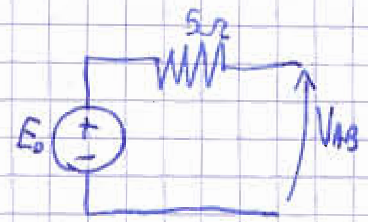
16/10/08

Per passare da un generatore di corrente a uno di tensione devo porre $E_0 = R \cdot I_0$ e che le resistenze siano uguali.

ES.

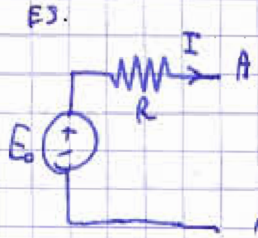


Trasformo in un generatore di tensione



$E_0 = 5\Omega \cdot 10A = 50V$

ES.

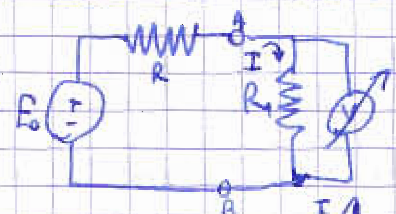


R → resistenza interna della pila

Misuro la tensione a vuoto della pila: $I=0 \Rightarrow E_0 = 5{,}35\,V$ misurata

Nella pila scarica è molto alta la resistenza interna.

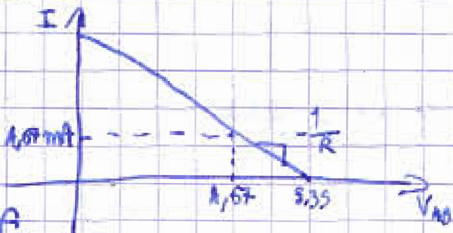
Collego in serie una resistenza R_1:



$R_1 = 1K\Omega \Rightarrow V_{AB} = 4{,}67\,V$

$V_{AB} - R_1 \cdot I = 0 \qquad I = \frac{V_{AB}}{R_1} = \frac{4{,}67\,V}{1K\Omega} = 4{,}67\,mA$

$E_0 - R \cdot I - R_1 I = 0 \qquad R = \frac{E_0 - R_1 I}{I} = \frac{5{,}35 - 4{,}67 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3}{4{,}67 \cdot 10^{-3}} = 145{,}6\,\Omega$



OPPURE

$-\frac{1}{R} = \frac{\Delta I}{\Delta V} = \frac{4{,}67 \cdot 10^{-3}}{0{,}68} = -\frac{1}{0{,}006867} = 145{,}6\,\Omega$

RESISTENZE IN SERIE

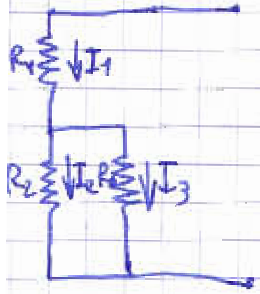
$V_1 = I \cdot R_1$

$V_2 = I \cdot R_2$

$V_2 + V_1 - V_{AB} = 0$ 2° PRINCIPIO DI KIRCHHOFF $\Rightarrow V_{AB} = V_1 + V_2 = I(R_1 + R_2)$

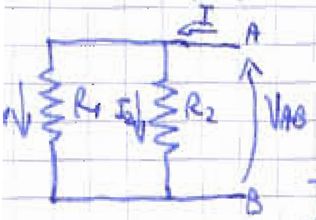
⇕ La resistenza equivalente di due resistenze in serie è la somma delle due. Due resistenze in serie hanno in comune un terminale e sono percorsi dalla stessa corrente

$R_{eq} = R_1 + R_2$



R_1 NON è in serie con R_2 anche se ha un solo terminale in comune perchè non hanno la stessa corrente che vi circola: $I_1 = I_2 + I_3$

RESISTENZE IN PARALLELO



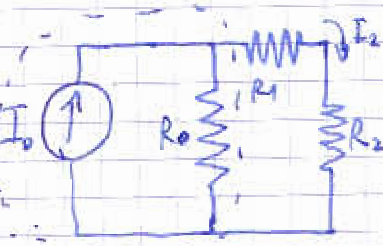
R_1 e R_2 hanno la stessa differenza di potenziale V_{AB}

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} \quad I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} \quad I = I_1 + I_2 = V_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = V_{AB} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$$

La resistenza equivalente di due resistenze in parallelo è l'inverso della somma dei reciproci di ogni resistenza.

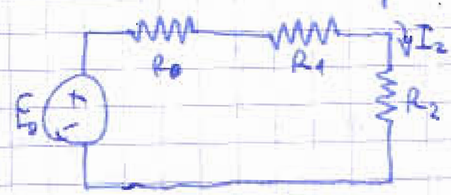
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \ldots$$

Con le conduttanze $G = \frac{1}{R}$ sarebbe stato tutto più semplice: $G_{eq} = G_1 + G_2$



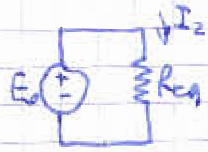
GENERATORE REALE DI CORRENTE

$I_2 = ?$ Devo convertire il generatore in uno di tensione e fare la serie delle resistenze



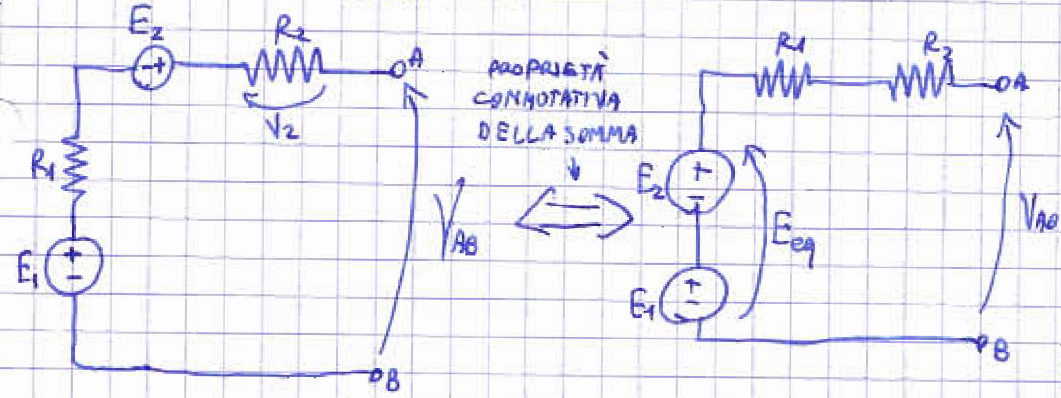
$E_0 = R_0 \cdot I_0$

$$R_{eq} = R_0 + R_1 + R_2 \qquad I_2 = \frac{E_0}{R_{eq}}$$



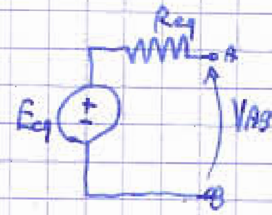
$$I_2 = \frac{R_0 \cdot I_0}{R_0 + R_1 + R_2}$$

GENERATORI IN SERIE

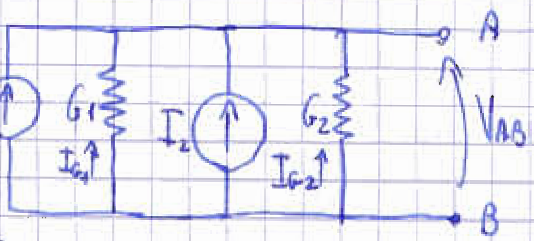


$$E_{eq} = E_1 + E_2$$

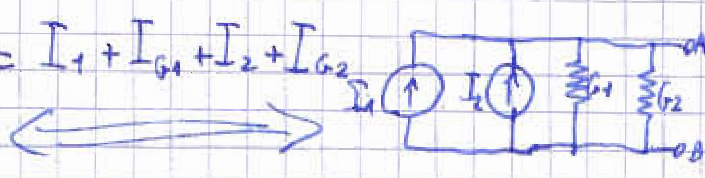
$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

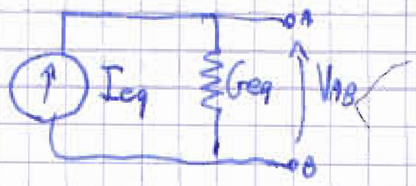


GENERATORI IN PARALLELO



$$I = I_1 + I_{G_1} + I_2 + I_{G_2}$$





Sempre per la proprietà commutativa.

$$I_{eq} = I_1 + I_2 \qquad G_{eq} = G_1 + G_2$$

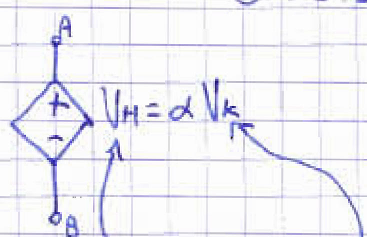
20/10/2008

DATE ESAMI

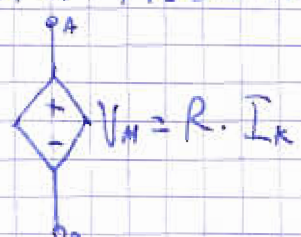
27/01 S 18/02 S

30/01 O 23/02 O

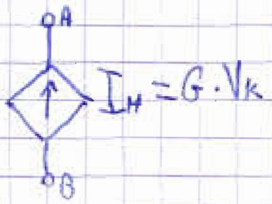
GENERATORI PILOTATI



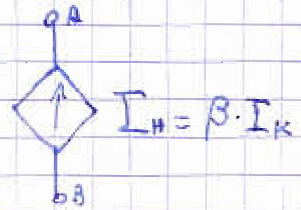
GENERATORE DI TENSIONE PILOTATO IN TENSIONE



GENERATORE DI TENSIONE PILOTATO IN CORRENTE

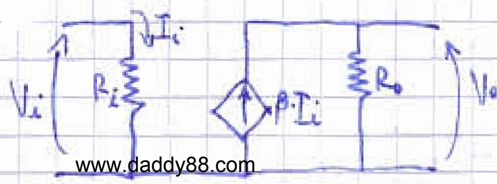


GENERATORE DI CORRENTE PILOTATO IN TENSIONE



GENERATORE DI CORRENTE PILOTATO IN CORRENTE

esempio

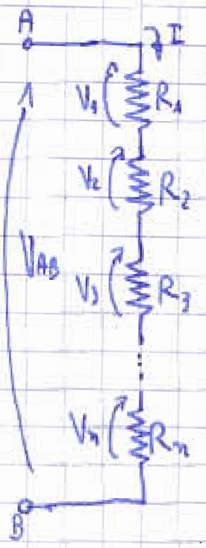


CIRCUITO EQUIVALENTE DI UN TRANSISTOR BIPOLARE

$$\frac{V_o}{V_i} = ?$$

$$V_0 = \beta \cdot I_i \cdot R_o = \beta \cdot \frac{V_i}{R_i} \cdot R_o \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = \beta \cdot \frac{R_o}{R_i}$$

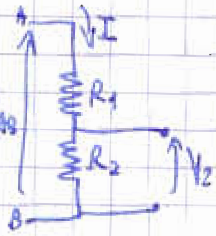
PARTITORE DI TENSIONE



$$I = \frac{V_{AB}}{\sum_{k=1}^{n} R_k} \qquad V_1 = R_1 \cdot I \qquad V_k = R_k \cdot I$$

$$\boxed{V_k = V_{AB} \cdot \frac{R_k}{\sum_{l=1}^{n} R_l}}$$

es.

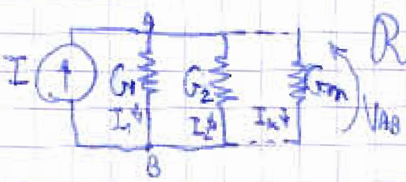


$$V_2 = \frac{V_{AB} \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$ se $V_{AB} = 32\,V$ e $V_2 = 5\,V$ $R_1 = ?$ $R_2 = ?$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5\,V}{32\,V} \qquad 32 R_2 = 5 R_1 + 5 R_2 \Rightarrow 27 R_2 = 5 R_1 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{27}{5}$$

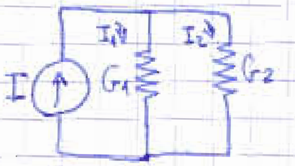
Se collego una resistenza a V_2, se questa è molto diversa da R_2 viene sbilanciata la tensione.

PARTITORE DI CORRENTE



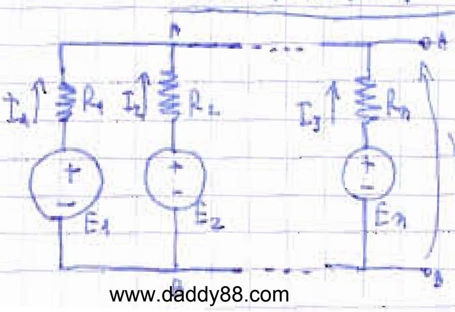
Ripartisce la corrente.

$$V_{AB} = \frac{I}{\sum_{k=1}^{n} G_k} \qquad \boxed{I_k = I \cdot \frac{G_k}{\sum_{l=1}^{n} G_l}} \qquad I_k = I \cdot \frac{\frac{1}{R_k}}{\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{R_l}}$$



$$I_1 = I \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2} = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

TEOREMA DI MILLMAN



Se considero solo il Ramo 1, applicando la legge di Kirchhoff

$$\begin{cases} V_{AB} - E_1 = -R_1 I_1 \\ V_{AB} - E_2 = -R_2 I_2 \ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1 - V_{AB}}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{E_2 - V_{AB}}{R_2} \\ \vdots \end{cases}$$

Per il 1° principio di Kirchhoff $\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{E_k - V_{AB}}{R_k} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k}{R_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{V_{AB}}{R_k} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k}{R_k} - V_{AB} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

$$\boxed{V_{AB} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{E_k}{R_k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}}$$

In generale

$$\boxed{V_{AB} = \frac{\sum_n I_{\text{CORTO CIRCUITO}}}{\sum_n \text{CONDUTTANZE}}}$$

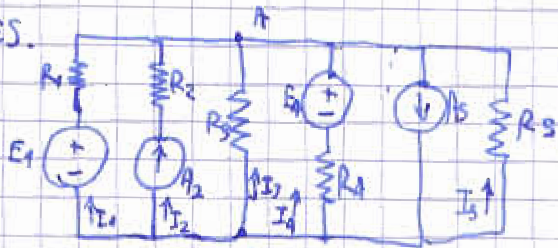
CONDUTTANZA DI RAMO K

$$\Downarrow$$

$$\frac{\Delta I_K}{\Delta V_{AB}}$$

Quando collego un carico, il teorema di Millman non vale più a meno che non rifaccio i calcoli tenendo conto del carico.

ES.



$I_2 = A_2$ sempre, $\forall R_2$.

$R_1 = 1\,\Omega$ $\quad E_1 = 10\,V$

$R_2 = 1\,\Omega$ $\quad A_2 = 5\,A$

$R_3 = 5\,\Omega$ $\quad E_4 = 5\,V$

$R_4 = 5\,\Omega$ $\quad A_5 = 1\,A$

$R_5 = 10\,\Omega$ $\quad V_{AB} = ?$

3° ramo, no generatore

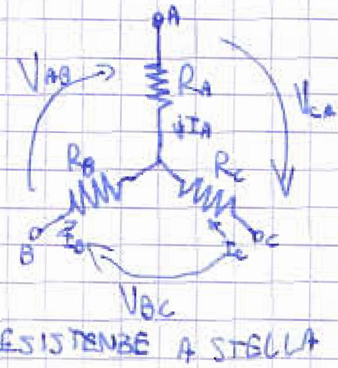
$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + A_2 + 0 + \frac{E_4}{R_4} - A_5 + 0}{\frac{1}{R_1} + 0 + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + 0 + \frac{1}{R_5}} =$$

$I = 5\,A$ sempre

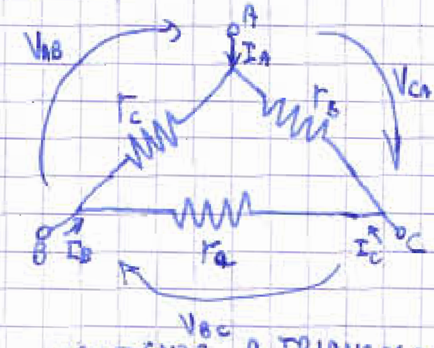
$\Delta I_K = 0$.

$$= \frac{10\,A + 5\,A + 0 + 1\,A - 1\,A + 0}{1\,S + 0 + 0{,}2\,S + 0{,}2\,S + 0 + 0{,}1\,S} = \frac{15\,A}{1{,}5\,S} = 10\,V$$

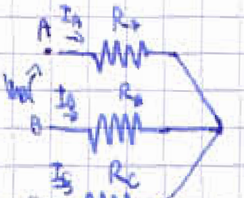
TRASFORMAZIONE STELLA ⟷ TRIANGOLO



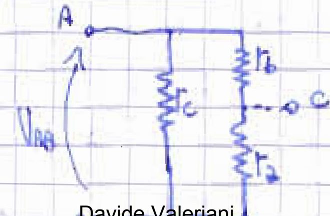
RESISTENZE A STELLA



RESISTENZE A TRIANGOLO



$R_{AB} = R_A + R_B$



$$r_{AB} = \frac{r_c\,(r_a + r_b)}{r_c + r_a + r_b}$$

Uguaglio R_{AB} e r_{AB}

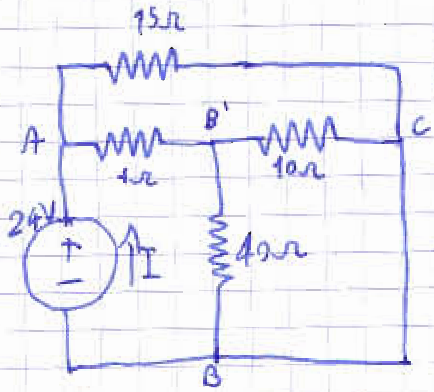
$$\begin{cases} R_A + R_B = \dfrac{r_c(r_a+r_b)}{r_c+r_a+r_b} \\[2ex] R_B + R_C = \dfrac{r_a(r_b+r_c)}{r_a+r_b+r_c} \\[2ex] R_A + R_C = \dfrac{r_b(r_a+r_c)}{r_a+r_b+r_c} \end{cases}$$

e così faccio per BC e AC

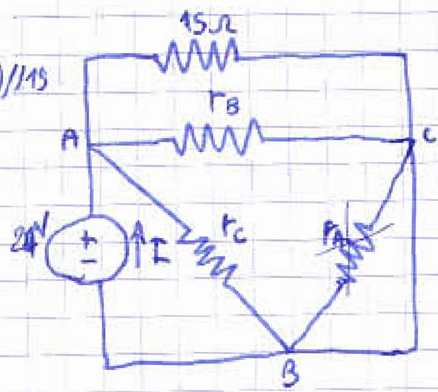
$Y \Rightarrow \Delta$ $\qquad\qquad$ $\Delta \Rightarrow Y$

$$\begin{cases} r_a = \dfrac{R_AR_B + R_BR_C + R_AR_C}{R_A} \\[2ex] r_b = \dfrac{R_AR_B + R_BR_C + R_AR_C}{R_B} \\[2ex] r_c = \dfrac{R_AR_B + R_BR_C + R_AR_C}{R_C} \end{cases} \qquad \begin{cases} R_A = \dfrac{r_br_c}{r_a+r_b+r_c} \\[2ex] R_B = \dfrac{r_ar_c}{r_a+r_b+r_c} \\[2ex] R_C = \dfrac{r_ar_b}{r_a+r_b+r_c} \end{cases}$$

23/10/08

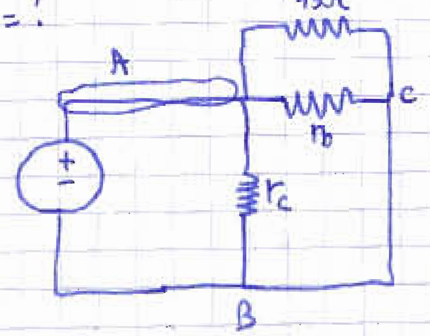


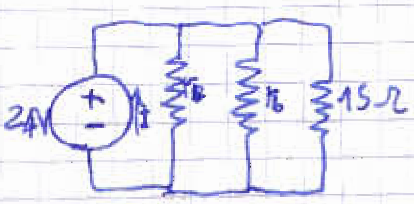
oppure
$R_{eq} = (10//10+1)//15$
$I = \dfrac{24}{R_{eq}} \dots$

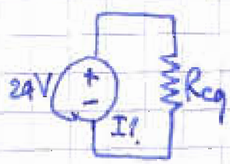


r_A è in parallelo con un cortocircuito, quindi è ininfluente

$I = ?$





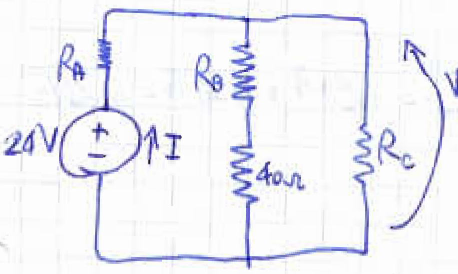


$$I = \frac{24V}{R_{eq}} = \frac{24V}{\frac{1}{\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{15}}}$$

$$r_B = \frac{(40\cdot 1 + 10\cdot 1 + 40\cdot 10)\Omega^2}{40\Omega} = \frac{45}{4}\Omega = 10{,}25\,\Omega$$

$$r_C = \frac{450\,\Omega^2}{10\,\Omega} = 45\,\Omega \qquad I = \frac{24}{\frac{1}{\frac{1}{45}+\frac{4}{45}+\frac{1}{15}}} = \frac{24}{\frac{1}{\frac{8}{45}}} = \frac{24\cdot 8}{45} = 4{,}27\,A$$

2° METODO: considero 15Ω, 1Ω e 10Ω a triangolo

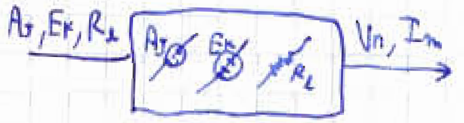


$$\begin{cases} R_A = \frac{15}{26}\Omega \\ R_B = \frac{5}{13}\Omega \\ R_C = \frac{75}{13}\Omega \end{cases}$$

millman

$$V_x = \frac{\frac{24}{R_A}+0+0}{\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B+40}+\frac{1}{R_C}} \qquad 24 - R_A\cdot I - V_x = 0 \qquad I = \frac{V_K-24}{R_A} = 4{,}27\,A$$

Principio di sovrapposizione degli effetti



$$S = \begin{vmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_m \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{vmatrix} \qquad y = \begin{vmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_p \\ I_1 \\ \vdots \\ I_R \end{vmatrix}$$

$n = \#$ gen. V

$m = \#$ gen I

$P = \#$ nodi

$R = \#$ rami

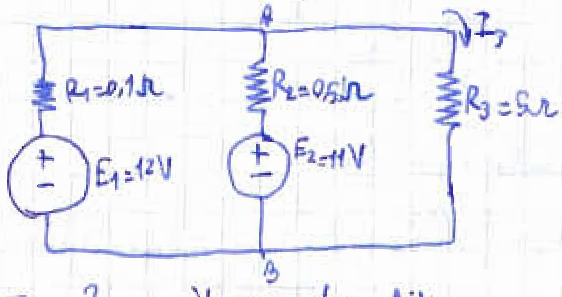
$$y = D \cdot S$$

D → matrice $(P+R)\times(n+m)$

$$\begin{cases} V_1 = d_{11}E_1 + d_{12}E_2 + \ldots + d_{1n}E_n + d_{1\,n+1}A_1 + d_{1\,n+2}A_2 + \ldots + d_{1\,n+m}A_m \\ V_2 = d_{21}E_1 + \ldots + d_{2n}E_n + d_{2\,n+1}A_1 + \ldots + d_{2\,n+m}A_m \\ \ldots \end{cases}$$

Si calcolano tutti i contributi dei singoli generatori (annullando gli altri) e alla fine si somma.

Annullare un generatore di tensione significa sostituirlo con un corto circuito, mentre per uno di corrente metto due morsetti aperti.



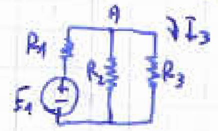
$$V_{AB} = V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\frac{0}{R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{120+22+0}{10+2+0{,}2} = 11{,}64\,V$$

$I_3 = ?$ $\quad V_B = 0$ di solito

$$I_3 = \frac{V_{AB}}{R_3} = \frac{11{,}64\,V}{5\,\Omega} = 2{,}33\,A$$

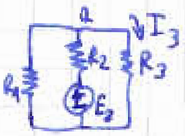
Applicando la sovr. degli effetti ...

- annullo E_2



$$V_A' = \frac{\frac{E_1}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{120}{10+2+0{,}2} = 9{,}84\,V \qquad I_3' = \frac{9{,}84\,V}{5\,\Omega} = 1{,}97\,A$$

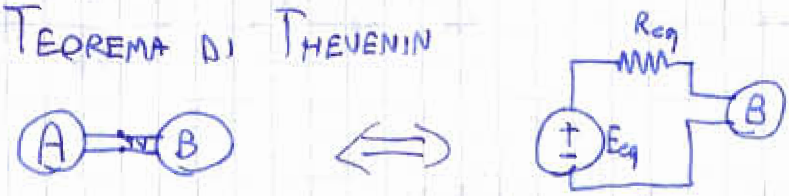
- annullo E_1



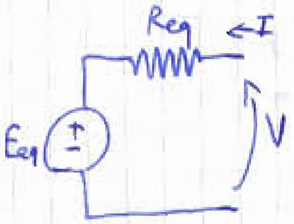
$$V_A'' = \frac{\frac{E_2}{R_2}}{12{,}2} = \frac{22}{12{,}2} = 1{,}8\,V \qquad I_3'' = \frac{1{,}8\,V}{5\,\Omega} = 0{,}36\,A$$

$$V_A = V_A' + V_A'' = 9{,}84\,V + 1{,}8\,V = 11{,}64\,V \qquad I_3 = I_3' + I_3'' = 1{,}97\,A + 0{,}36\,A = 2{,}33\,A$$

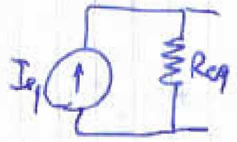
TEOREMA DI THEVENIN



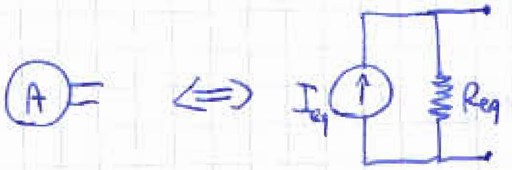
27/10/08



oppure



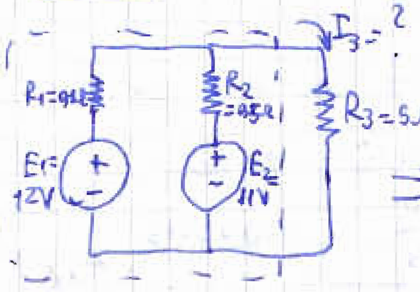
TEOREMA DI NORTON



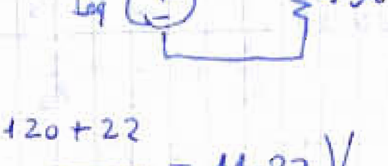
THEVENIN	NORTON
$R_{eq.Th}$	$R_{eq.No} = R_{eq.Th}$
$E_{eq.Th}$	$I_{eq\,No} = \frac{E_{eq.Th}}{R_{eq.Th}}$

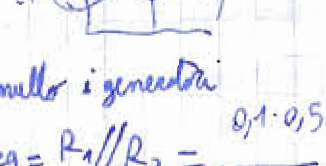
$$E_{eq} = V\big|_{I=0 \text{ morsetti aperti}} \qquad I_{eq} = I\big|_{V=0} \qquad R_{eq} = R_{\text{vista dai morsetti}}\big|_{A_j,\,E_k=0}$$

ESEMPIO



Individuo una sottorete da semplificare con Thevenin





MILLMAN

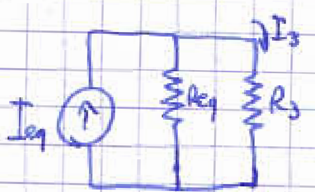
$$E_{eq} = \frac{\frac{12}{0{,}1}+\frac{11}{0{,}5}}{\frac{1}{0{,}1}+\frac{1}{0{,}5}} = \frac{120+22}{10+2} = 11{,}83\,V$$

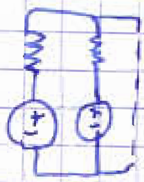
annullo i generatori

$$R_{eq} = R_1 // R_2 = \frac{0{,}1\cdot 0{,}5}{0{,}1+0{,}5} = 83{,}3\,m\Omega$$

$$I_3 = \frac{E_{eq}}{R_{eq}+R_3} = \frac{11,83}{5+83,3\cdot 10^{-3}} = 2,33A.$$

Applico ora Norton





$$I_{eq} = I_{cc1} + I_{cc2} = 120 + 22 = 142\,A$$

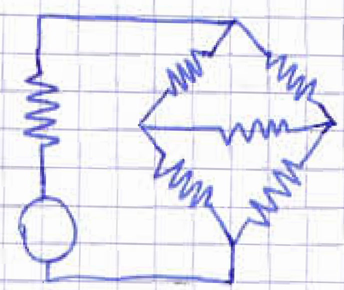
$$R_{eq} = 83,3\,m\Omega$$

Applico il partitore : $I_3 = \frac{I_{eq}}{G_{eq}+G_3} \cdot G_3 = 2,33A$

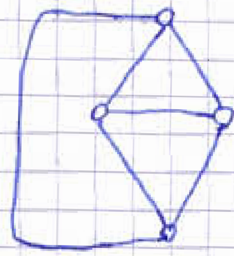
Due batterie che alimentano un carico

$V = 11,64\,V$ $\quad I_1 = \frac{E_1 - V}{R_1} = 3,6\,A$ $\quad I_2 = \frac{E_2 - V}{R_2} = -1,28\,A$ la seconda batteria assorbe carica dalla 1ª

TEORIA DEI GRAFI



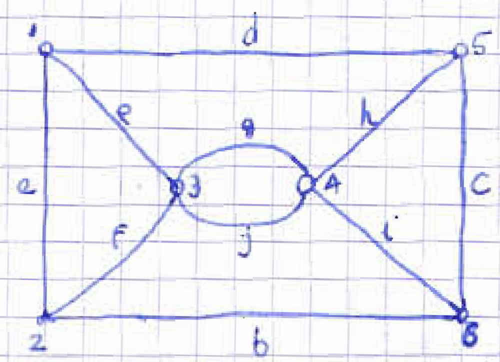
$\Leftarrow$



Mette in evidenza gli aspetti topologici del circuito

Un grafo si dice IRRIDUCIBILE se non è possibile accorpare lati in parallelo o in serie.

CAMMINO $\rightarrow$ serie di lati e nodi che unisce due nodi. Nessun nodo deve essere punto terminale di più di 2 lati del cammino; ai nodi di partenza e arrivo arriva un solo lato.



n=6 Un grafo è TOTALMENTE CONNESSO se presi 2
l=10 nodi esiste un cammino che li unisca.
Se aggiungessi  non sarebbe connesso.

MAGLIA $\rightarrow$ sottografo connesso in cui ogni nodo fa capo a soli due lati.
Entità fondamentale $\rightarrow$ posso applicare il 2° principio di Kirchhoff

ALBERO $\rightarrow$ sottografo connesso formato da tutti i nodi del grafo di partenza

CO-ALBERO → insieme dei lati tolti dal grafo di partenza.

I lati che formano il coalbero si chiamano CORDE.

Aggiungendo una qualsiasi corda al coalbero forma una maglia.

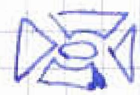
Le maglie individuate sono MAGLIE FONDAMENTALI perché sono tra loro linearmente indipendenti.

$p = n-1$ numero di lati dell'albero

$c = l - n + 1 = m$ numero dei lati del co-albero = n° maglie linearmente indipendenti

TAGLIO → insieme minimo di lati che devo togliere da un grafo connesso per farlo diventare non connesso.

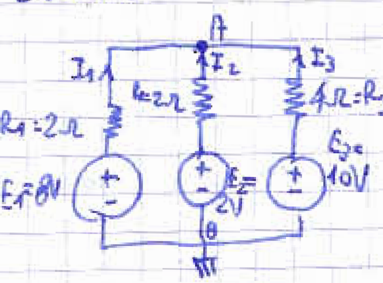
Per ogni taglio è possibile scrivere la 1ª legge di Kirchoff.

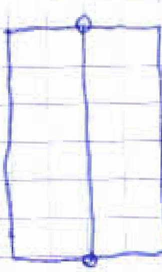
Per trovare le maglie indipendenti cerco un insieme di maglie che facciano una copertura minima del circuito. 

Una rete elettrica si dice COMPLETAMENTE RISOLTA quando conosco tutti i p potenziali ai nodi e le l correnti ai lati. $\Rightarrow l+n-1$ incognite.

Uno dei potenziali lo metto a massa, ecco perché il -1

ESEMPIO



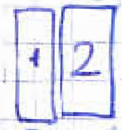


$l = 3$ incognite: $l+n-1=4$

$n = 2$ $I_1, I_2, I_3, V_A = ?$

$p = n-1 = 1$ potenziale incognito

$m = l-n+1 = 2$

NODO A $I_1+I_2+I_3=0$ Trovo le maglie indipendenti 

(NODO B $-I_1-I_2-I_3=0$) $E_1 - R_1 I_1 + R_2 I_2 - E_2 = 0$

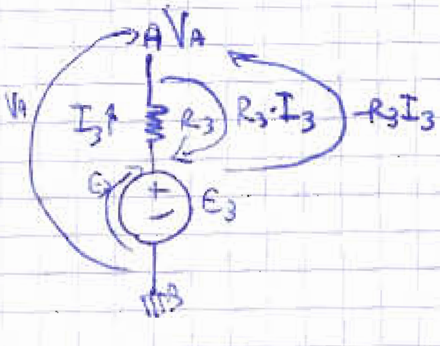
$E_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 - E_3 = 0$

30/10/08

$$\begin{cases} I_1+I_2+I_3=0 \\ E_1 - R_1 I_1 + R_2 I_2 - E_2 = 0 \\ E_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 - E_3 = 0 \\ V_A - E_3 = -R_3 I_3 \end{cases}$$

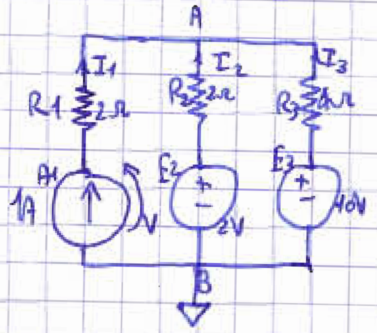
oppure

$V_A + R_3 I_3 - E_3 = 0$



$$\begin{cases} I_1 = 1A \\ I_2 = -2A \\ I_3 = 1A \\ V_A = 6V \end{cases}$$

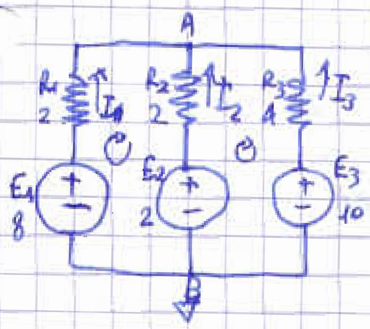
Se aggiungessi un generatore di tensione in parallelo senza resistenza, fisserei il valore di V_A al potenziale del generatore.



$l = 3$
$n = 2$
$p = 1$
$m = 2$

$I_1 = 1A$ non è più incognita, quindi le incognite sono 3. Ho però V da determinare, ma conoscere il valore di V è inutile per risolvere la rete.

METODO DI MAXWELL ALLE MAGLIE



Permette di calcolare agevolmente le correnti di maglia

1. Scelgo le due maglie interne (linearmente indipendenti) indicate A e B, in cui circolano una corrente I_A e I_B

$I_2 = I_B - I_A \qquad I_1 = I_A \qquad I_3 = -I_B$

2. Applico Kirchhoff utilizzando I_A, I_B: $\begin{cases} E_1 - R_1 I_A + R_2(I_B - I_A) - E_2 = 0 \\ E_2 - R_2(I_B - I_A) - R_3 I_B - E_3 = 0 \end{cases}$ considero I_B che va in giù

$$\begin{cases} I_A = 1A \\ I_B = -1A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 1A \\ I_2 = -2A \\ I_3 = 1A \end{cases}$$

Si può semplificare ancora di più!

1.

$$\begin{vmatrix} \Sigma E_A \\ \Sigma E_B \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma R_A & -R_{AB} & R_{AC} & \\ -R_{AB} & \Sigma R_B & \vdots & \\ & \dots & & \ddots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_a \\ I_b \\ \vdots \end{vmatrix}$$

Matrice quadrata $m \times m$

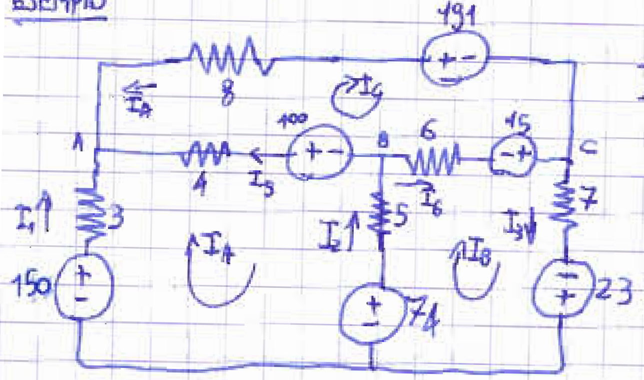
1. Ricavo i termini noti considerando la maglia corrispondente e sommando i generatori che incontro nella maglia
2. La matrice (simmetrica, $a_{ij} = a_{ji}$) la ottengo:
   - diagonale principale: somma delle resistenze della maglia
   - nelle altre caselle metto le resistenze del ramo condiviso tra le due maglie, cambiate di segno

$$\begin{array}{c} 1. \\ \begin{vmatrix} 8-2=6 \\ 2-10=-8 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \end{array} \cdot \begin{vmatrix} I_A \\ I_B \end{vmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 6 = 4I_A - 2I_B \\ \dots \end{cases}$$

ESEMPIO



$I_1, \dots, I_6 = ?$

$$
\begin{array}{c}
15-100-74 \\
\downarrow
\end{array}
\quad
\begin{vmatrix} -24 \\ 112 \\ -106 \end{vmatrix}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\
\begin{vmatrix} 12 & -5 & -4 \\ -5 & 18 & -6 \\ -4 & -6 & 18 \end{vmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{vmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{cases}
-24 = 12 I_A - 5 I_B - 4 I_C \\
+112 = -5 I_A + 18 I_B - 6 I_C \\
-106 = -4 I_A - 6 I_B + 18 I_C
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
I_C = \dfrac{12 I_A - 5 I_B + 24}{4} \\
112 = -5 I_A + 18 I_B - \overset{3}{\cancel{6}} \cdot \dfrac{12 I_A - 5 I_B + 24}{\underset{2}{\cancel{4}}} \\
-106 = -4 I_A - 6 I_B + 18 \cdot \dfrac{12 I_A - 5 I_B + 24}{4}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dots \\
112 = -23 I_A + \dfrac{51}{2} I_B - 36 \\
-106 = 50 I_A - \dfrac{57}{2} I_B + 108
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dots \\
296 = -46 I_A + 51 I_B \\
-428 = 100 I_A - 57 I_B
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dots \\
I_A = \dfrac{51 I_B - 296}{46} \\
-428 = \overset{50}{\cancel{100}} \cdot \dfrac{51 I_B - 296}{\cancel{46}\,23} - 57 I_B
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
-9844 = 2550 I_B - 14800 - 1311 I_B \\
\dots \\
\dots
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
I_B = 4A \\
I_A = -2A \\
I_C = -5A
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
I_1 = I_A = -2A \\
I_2 = I_B - I_A = 6A \\
I_3 = I_B = 4A \\
I_4 = -I_C = 5A \\
I_5 = I_C - I_A = -3A \\
I_6 = I_B - I_C = 9A
\end{cases}
$$

La matrice è simmetrica a patto che non siano presenti generatori pilotati.

METODO DI MAXWELL AI NODI

1. Scrivo le 1e equazioni di Kirchhoff ai nodi:

$$\begin{cases} A: & I_1+I_4+I_5=0 \\ B: & I_2-I_5-I_6=0 \\ C: & I_6-I_3-I_4=0 \end{cases}$$

2. Scrivo le correnti in funzione dei potenziali di nodo

$$I_1=\frac{150-V_A}{3} \qquad I_2=\frac{74-V_B}{5} \qquad I_3=\frac{23+V_C}{7}$$

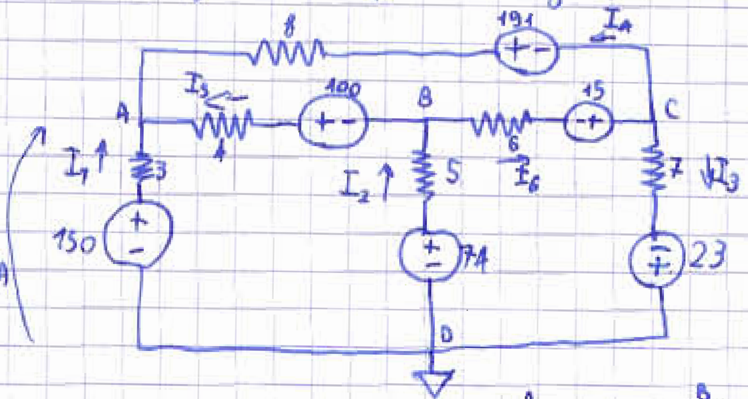
$$I_4=\frac{V_C-V_A+191}{8} \qquad I_5=\frac{V_B+100-V_A}{4} \qquad I_6=\frac{V_B+15-V_C}{6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{150-V_A}{3}+\dfrac{V_C-V_A+191}{8}+\dfrac{V_B+100-V_A}{4}=0 \\[2mm] \dfrac{74-V_B}{5}-\dfrac{V_B+100-V_A}{4}-\dfrac{V_B+15-V_C}{6}=0 \\[2mm] \dfrac{V_B+15-V_C}{6}-\dfrac{23+V_C}{7}-\dfrac{V_C-V_A+191}{8}=0 \end{cases}$$

Esiste un metodo più veloce per ottenere direttamente il sistema in forma matriciale

$\Downarrow$

03/11/2008



$$\begin{array}{c} \\ \begin{vmatrix} \frac{150}{3}+\frac{100}{4}+\frac{191}{8} \\[2mm] \frac{-100}{4}+\frac{74}{5}-\frac{15}{6} \\[2mm] \frac{23}{7}+\frac{15}{6}-\frac{191}{8} \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c|ccc|} & A & B & C \\ \hline A & \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\[2mm] B & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\[2mm] C & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} \end{array} \begin{vmatrix} V_A \\[2mm] V_B \\[2mm] V_C \end{vmatrix}$$

CORRENTI DI CORTO CIRCUITO ENTRANTI NEL NODO

OPPOSTO DELLA CONDUTTANZA TRA IL NODO B E IL NODO C

SOMMA DELLE CONDUTTANZE CHE PUNTANO SUL RAMO

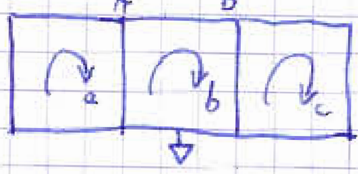
Considero il verso del generatore, non della corrente incognita

$\stackrel{+}{-}\ \uparrow \qquad \stackrel{-}{+}\ \downarrow$

$$\begin{cases} V_A=156\,V \\ V_B=44\,V \\ V_C=5\,V \end{cases}$$

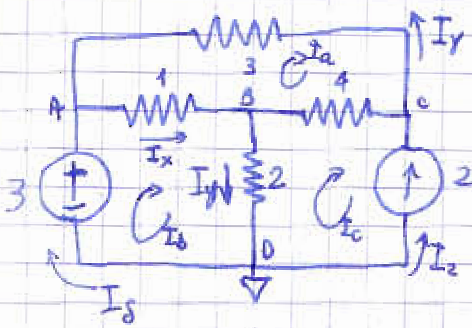
$I_1 \Rightarrow 150-3I_1-V_A=0$

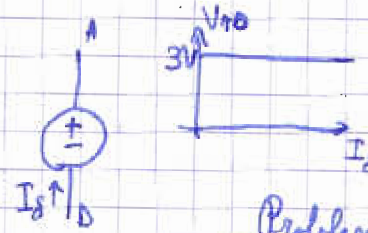
$-3I_1=+6 \qquad I_1=-2A$



Più semplice usare il metodo di Maxwell ai nodi. Se usassi quello delle maglie, tra le maglie a e C non ci sono resistenze, quindi scrivo 0 nella matrice

CASI DEGENERI

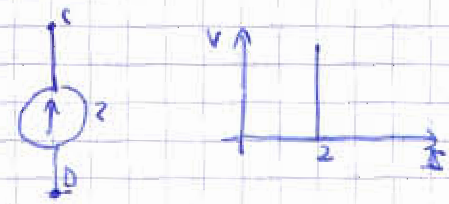




RAMO DEGENERE

$$R=\frac{\Delta V_{AD}}{\Delta I_\delta}=0 \Rightarrow G=\infty$$

Problemi nel metodo di Maxwell ai nodi



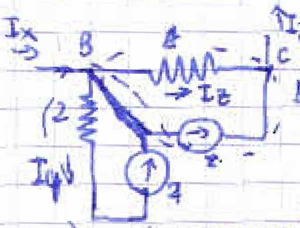
$$R=\frac{\Delta V_{CD}}{\Delta I_2}=\infty \Rightarrow G=0$$

Problemi nel metodo di Maxwell alle maglie

RAMO DEGENERE

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ ? \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+a+\infty? & \dots \\ & \\ & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_a \\ I_\delta \\ I_c \end{vmatrix}$$

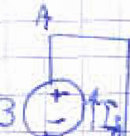
Modifico quindi il circuito trasformando il generatore ideale di corrente in due reali.



GENERATORI REALI

B. $I_x - I_y - I_z + 2 - 2 = 0$

C. $I_z - I_\gamma + 2 = 0$

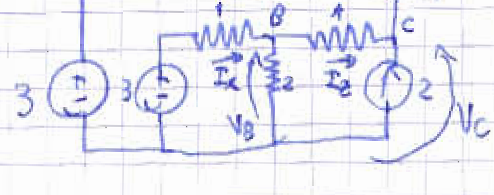


È assurdo perché metto a 0 la V che però è di 3V.

Metodo di Maxwell ai nodi.

$$\begin{vmatrix} 0+0+?\infty \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}+1+\infty? & \dots \\ & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{vmatrix}$$

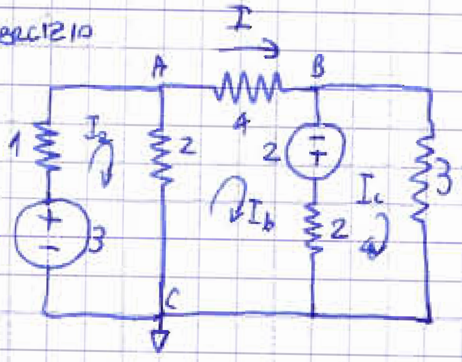
Sdoppio il generatore di tensione in due reali.



B) $V_B = 3 - 1\cdot I_x$

C) $V_C = 3+3I_\gamma$

ESERCIZIO



Metodo di Maxwell ai nodi!

$$\begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \end{vmatrix}$$

correnti corto circuito

$$\begin{cases} 3 = \frac{7}{4}V_A - \frac{1}{4}V_B \\ -1 = -\frac{1}{4}V_A + \frac{13}{12}V_B \end{cases} \qquad \begin{cases} 12 = 7V_A - V_B \\ -12 = -3V_A + 13V_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_B = 7V_A - 12 \\ -12 = -3V_A + 91V_A - 156 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_A = \frac{144}{88} = 1,636\,V \\ V_B = \frac{144}{88} - 12 = -0,547\,V \end{cases} \qquad I = \frac{V_{AB}}{4\Omega} = \frac{V_A - V_B}{4\Omega} = 0,546\,A$$

Metodo alle maglie!

$$\begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{vmatrix} 1+2 & -2 & 0 \\ -2 & 2+4+2 & -2 \\ 0 & -2 & 2+3 \end{vmatrix} \end{array} \begin{vmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{vmatrix}$$

nessun ramo in comune

$$\begin{cases} 3 = 3I_a - 2I_b \\ 2 = -2I_a + 8I_b - 2I_c \\ -2 = -2I_b + 5I_c \end{cases}$$

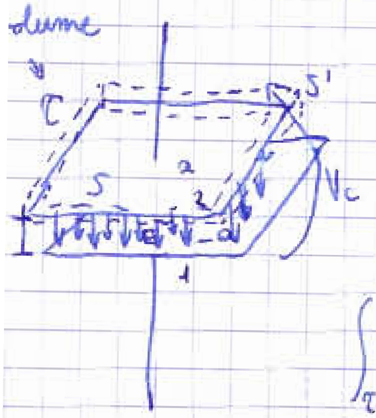
Mi basta trova[re] I_b perché $I_b = I$

$$\begin{cases} I_a = 1 + \frac{2}{3}I_b \\ 2 = -2 - \frac{4}{3}I_b - 2I_c + 8I_b \Rightarrow \\ I_c = -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}I_b \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ \dots \\ 4 = -\frac{4}{3}I_b + \frac{4}{5} - \frac{4}{5}I_b + 8I_b \quad 60 = -20I_b + 12 - 12I_b + 120I_b \end{cases}$$

$$88I_b = -48 \qquad I_b = \frac{48}{88} = 0,546\,A = I$$

FINE PRIMA PARTE (1° es. d'esame)

CONDENSATORE



$\mathrm{div}\,\vec D = \rho$ densità di carica spaziale

$\int_\tau \mathrm{div}\,\vec D\, d\tau = \oint_{S'} \vec D\cdot\hat n\, dS$ teorema della divergenza

$\int_\tau \rho\, d\tau = \oint_{S'} \underbrace{\vec D}_{\vec D = \varepsilon\cdot\vec E}\cdot \hat n\, dS \Rightarrow Q = \varepsilon\oint_{S'}\vec E\cdot\hat n\, dS$ Q è tutta sull'armatura del condensatore

Sposto degli elettroni dall'armatura superiore a quella inferiore. Si crea un campo elettrico E, costante nella faccia inferiore del parallelepipedo. Il flusso di E dà un solo contributo.

$Q = \varepsilon\cdot E\cdot S$

All'interno del dielettrico si crea un campo elettrico $|E| = \frac{Q}{\varepsilon S}$

costante dielettrica del materiale che separa le armature

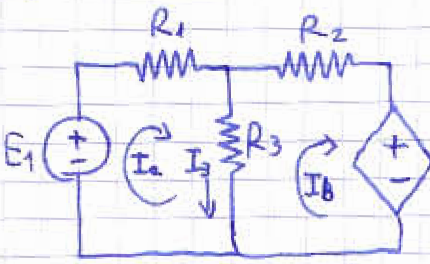
$V_C = -\int E\,dl \overset{(*)}{=} E\cdot d$ $\quad \underbrace{C}_{\text{CAPACITÀ DEL CONDENSATORE}} = \frac{Q}{V_C}$ [F]

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_C} = \frac{\varepsilon\cdot \cancel{E}\cdot S}{+\cancel{E}\cdot d} = \frac{\varepsilon\cdot S}{d}}$$

↳ carica spostata frutto tensione creata $\vec E = -\mathrm{grad}\,V$

(*) $V_C = V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec E\, d\vec l = \int_2^1 \vec E\, d\vec l = E\cdot d$

06/11/2008



$E_2 = R_\alpha\cdot I_3$ generatore pilotato

$I_3 = ?$

$I_3 = I_a - I_b$

$$\begin{vmatrix} E_1 \\ -E_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2+R_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_a \\ I_b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} E_1 \\ R_\alpha(I_b - I_a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2+R_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_a \\ I_b \end{vmatrix}$$

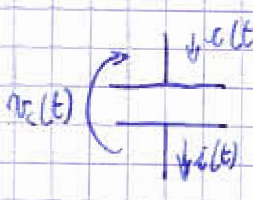
$$\begin{vmatrix} E_1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ -R_3+R_\alpha & R_3+R_2-R_\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_a \\ I_b \end{vmatrix}$$

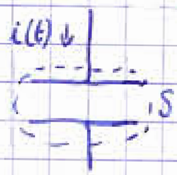
Matrice non simmetrica come previsto perché è presente un generatore pilotato.

RIGIDITÀ DIELETTRICA → capacità del materiale di sopportare tensioni elevate a distanze brevi.

$R_{d\,ARIA} = 30\,kV/cm$ se le armature sono a 1 cm di distanza posso applicare 30000 V al massimo, altrimenti il condensatore si rompe.

CAPACITÀ PARASSITE → condensatore indesiderato nel circuito, che non ho messo io; ad esempio, il cavo coassiale funge anche da condensatore.





$$\oint_S \vec{J}\,\vec{n}\,dS = 0$$

grandezze funzioni del tempo → lettere minuscole

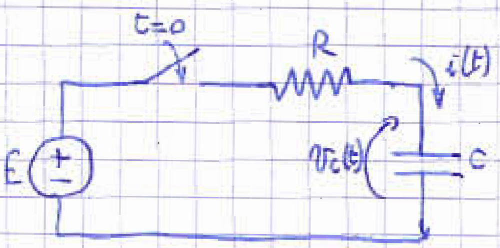
$$V_c = \frac{Q}{C} \qquad v_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^Q dq(t) = \frac{1}{C}\int_0^T i(t)\,dt \Rightarrow \boxed{i(t) = C\cdot\frac{dv_c(t)}{dt}}$$

LEGGE COSTITUTIVA DEL CONDENSATORE

Ciò che avviene ai capi del condensatore dipende anche da ciò che è avvenuto in passato. Il CONDENSATORE è un COMPONENTE LINEARE CON MEMORIA. Questi componenti vengono detti REATTIVI.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{energia immagazzinata}}}{W} = \int_0^W dW = \int_0^Q v_c(t)\,dq = \int_0^Q \frac{q(t)}{C}\,dq = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\,C\,V_c^2$$

V_c → tensione finale che raggiungo a condensatore carico.



$$v_c(0^-) = 0 \qquad v_c : 0 \to E \qquad i : \frac{E}{R} \to 0$$

$$E = v_c(t) + R\,i(t) \qquad i(t) = C\cdot\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$E = v_c(t) + R\cdot C\cdot\frac{dv_c(t)}{dt} \qquad v_c(t) = v_{c\,omogenea} + v_{c\,particolare}$$

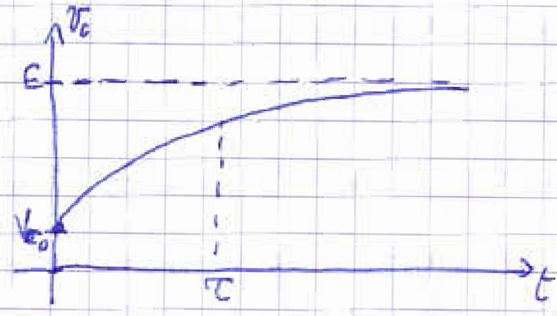
Eq caratteristica $\quad 0 = RC\alpha + 1 \quad \alpha = -\frac{1}{RC} \quad v_{c\,omogenea} = K_v\,e^{-\frac{1}{RC}t}$

$v_{c\,particolare} = E$ valore a cui tende v_c alla fine (sempre così

⇓

$$v_c(t) = K_v\,e^{-\frac{1}{RC}t} + E \qquad \underset{\text{cond. iniziale}}{v_c(0) = V_0} \qquad V_0 = K_v e^0 + E \qquad K_v = V_0 - E$$

$$V_c(t) = (V_0 - E)\cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + E$$



$\tau = RC$ costante di tempo.

se $t = \tau \Rightarrow v_c(\tau) = (V_0 - E)\cdot \underbrace{e^{-1}}_{\simeq 0,37} + E$

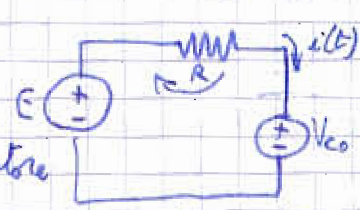
la tensione del condensatore ha raggiunto il 63% dell'escursione $(E - V_0)$.

Si prende come fine del transitorio l'istante in cui si raggiunge il 99% di E, circa 5τ di solito

10/11/08

$$E = v_c(t) + R\cdot i(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt + R\cdot i(t) \xrightarrow{\text{derivo}} 0 = \frac{1}{C}\, i(t) + R\,\frac{di(t)}{dt}$$

$i(t) = K_i \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$ in $t=0$, posso considerare il condensatore come un generatore di tensione di valore V_{c0}

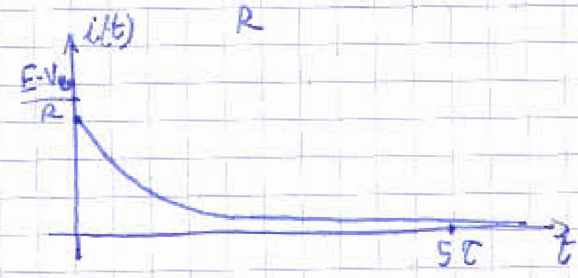


solo per $t=0$

$E = \frac{1}{2}CV_c^2$ La tensione ai capi di un condensatore è una funzione continua. altrimenti nel punto di discontinuità si avrebbe potenza infinita.

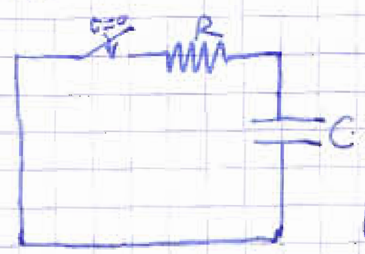
$i(0) = \frac{E - V_{c0}}{R}$ condizione iniziale $\quad i(0) = K_i \cdot e^0 = K_i \quad \frac{E - V_{c0}}{R} = K_i$

$$\boxed{i(t) = \frac{E - V_{c0}}{R}\cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}}$$



$i(5\tau) = \frac{1}{100}\, i(0)$ trascurabile

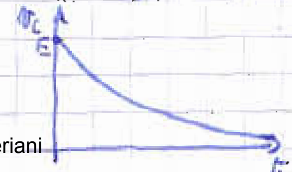
SCARICA DEL CONDENSATORE

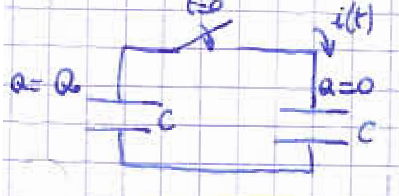


$$0 = RC\,\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) \qquad v_c(t) = K_s \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$t=0 \quad v_c(0) = V_{c0} = E \qquad E = K_s \cdot e^{-0} \Rightarrow K_s = E$

$$v_c(t) = E\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$





$t<0 \quad E = \frac{1}{2} C \cdot \left(\frac{Q_0}{C}\right)^2 + 0 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$. SITUAZIONE IDEALE

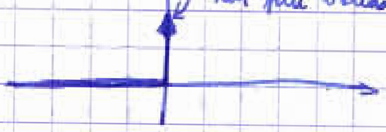
perchè

$t \gg 0 \quad E = 2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C}\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\frac{Q_0^2}{C} < \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$

l'energia in difetto si è propagata per via elettromagnetica (antenna)

legge di conservazione della carica.

regime q.s. non più valido



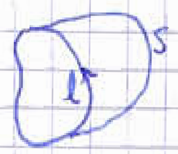
INDUTTORI

Dispositivi che basano il loro funzionamento sull'induzione elettromagnetica

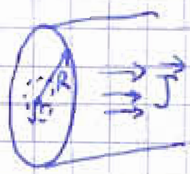
$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J}$

$$\underbrace{\int_S \mathrm{rot}\,\vec{H} \cdot \hat{n}\,ds = \oint_l \vec{H}\,d\vec{l}}_{\text{teorema di Stokes}} = \underbrace{\int_S \vec{J} \cdot \hat{n}\,ds}_{I_c}$$

$I_c \to$ corrente totale concatenata presente dentro la linea chiusa l



$$\boxed{I_c = \oint_l \vec{H}\,d\vec{l}}$$ LEGGE DI CIRCUITAZIONE DI AMPÈRE

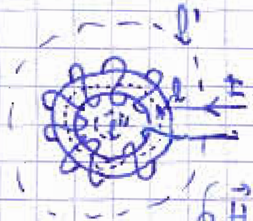


$\oint_l \vec{H}\,d\vec{l} = I_c$ campo magnetico

$H \cdot 2\pi r = J\pi r^2 = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2 \qquad H_I = \frac{I}{2\pi R^2} \cdot r$

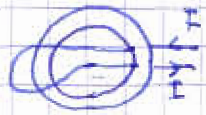
$H_E = \frac{I}{2\pi r}$

campo magnetico esterno ad un filo percorso da corrente



$I_c = N \cdot I$

n° spire



$I_c = 0$

$\oint_l \vec{H}\,d\vec{l} = I_c \qquad H \cdot L = N \cdot I \qquad H_I = \frac{N \cdot I}{L}$

lunghezza totale

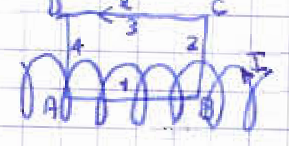
campo magnetico interno

$I_c' = 0 \Rightarrow H' = 0$

tante spire entrano, tante ne escono. $\quad I_c'' = 0 \Rightarrow H'' = 0$ nessuna spira

SOLENOIDE INFINITO

Vicino ai bordi, il campo magnetico subisce delle variazioni rispetto a quanto accade al centro (EFFETTO AI BORDI).



$$\oint_l \vec{H}\,d\vec{l} = \int_1 \vec{H}\,d\vec{l} + \int_2 \vec{H}\,d\vec{l} + \int_3 \vec{H}\,d\vec{l} + \int_4 \vec{H}\,d\vec{l} =$$

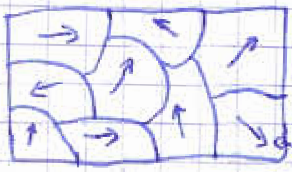
$$= \underset{\text{lunghezza di AB}}{H \cdot L_{AB}} + \underset{H \perp l}{0} + \underset{\text{no linee di forza}}{0} + \underset{H \perp l}{0} = \underbrace{N_{AB} \cdot I}_{[A \cdot s]} \qquad H_I = \frac{N_{AB} \cdot I}{L_{AB}} = I \cdot \frac{N}{l}$$

$\left[\frac{A \cdot s}{m}\right]$

$[A \cdot s]$ → s spire: amperespire

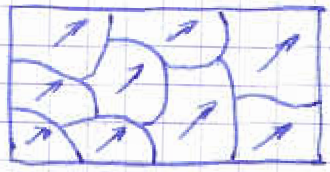
$\frac{N}{l}$ DENSITÀ SPIRE

MATERIALI FERROMAGNETICI



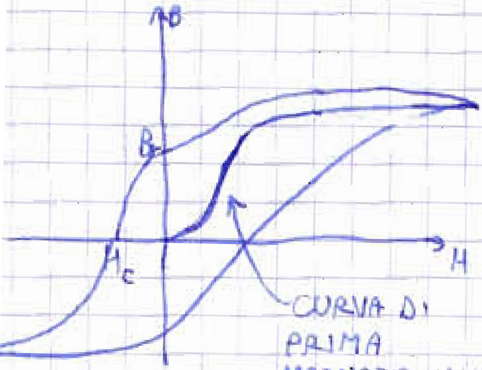
dipoli orientati a caso

domini magnetici



H si orientano tutti o quasi (quelli opposti un po' meno) alla direzione di H.

Questo crea una permeabilità magnetica molto più elevata di quella del vuoto



Se una volta saturato il materiale, azzero H ho un campo B_r (magnetizzazione residua)

H_c → campo coercitivo negativo che serve per annullare il campo B.

μ molto elevato : 5000 volte μ_0.

permeabilità magnetica

13/11/08

$\mu = \frac{B}{H}$ assume valori diversi a seconda di B e H. Per valori lontani dalla saturazione, si ha μ max.

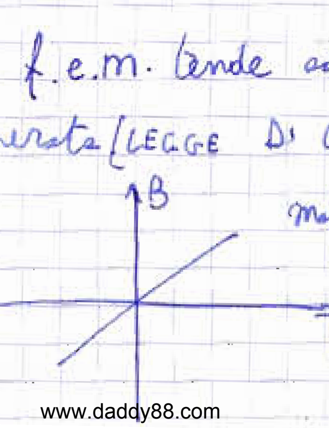
$\vec{H} = \frac{N \cdot I}{L}$ dipende dalla corrente

f.e.m. $e = -\frac{d\Phi_c}{dt} =$ LEGGE INDUZIONE DI FARADAY

$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ dipende dal materiale

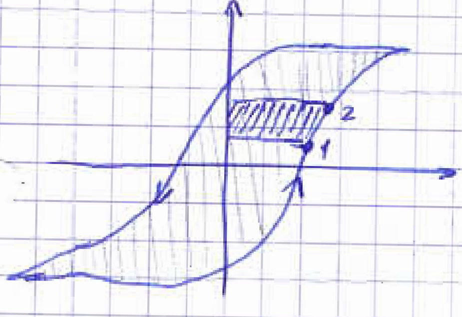
$= -N_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -S N_2 \cdot \frac{dB}{dt}$ modi

La f.e.m. tende ad opporsi alla variazione di corrente che l'ha generata (LEGGE DI LENZ)



materiali NON ferromagnetici

$\mu = \text{cost.}$



potenza elettrica

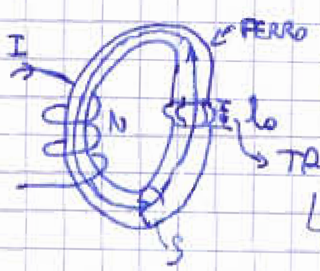
$$dW_{12} = \overbrace{e \cdot i}^{\text{potenza elettrica}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{tempo impiegato da 1 a 2}}}{dt} =$$

$$= i \cdot d\Phi_c = i \cdot N \cdot S \cdot dB = H \cdot \underbrace{L \cdot S}_{\text{VOLUME } \tau} \cdot dB = \tau (H \cdot dB)$$

DENSITÀ DI ENERGIA PER UNITÀ DI VOLUME SPESA X PASSARE DA 1 A 2.

$C \left[W/kg \right] \sim 1{,}5 \div 3 \ W/kg$

CIRCUITI MAGNETICI



$\mathrm{div} \vec{J} = 0$

$\mathrm{div} \vec{B} = 0$

↳ le linee di forza tendono ad allargarsi. H elevato.

ELETTRICO	MAGNETICO
$\vec{J}$	$\vec{B}$
I	Φ
V	$N \cdot I$
R	$\mathcal{R}$
ρ	$1/\mu$

$\oint \vec{H} \, d\vec{l} = N \cdot I$ $\qquad H_{fe} \cdot l_{fe} + H_{aria} \cdot l_{traferro} = N \cdot I$

CIRCUITAZIONE DI AMPÈRE

$N \cdot I = \oint \vec{H} \, d\vec{l} = \sum H_i \cdot l_i$ somma dei pezzi di circuito con caratteristiche diverse

$H \cdot \mu = B$

$$\sum H_i \cdot l_i \frac{S_i \mu_i}{S_i \mu_i} = N \cdot I \Rightarrow \sum \underset{\substack{\downarrow \\ \text{costante perché solenoidale}}}{\Phi_i} \cdot \frac{l_i}{S_i \mu_i} = N \cdot I \qquad \Phi \sum \frac{l_i}{S_i \mu_i} = N \cdot I$$

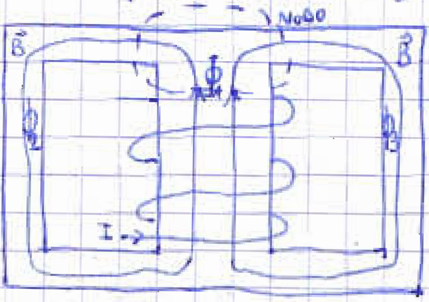
$B \cdot S = \Phi$

$\mathcal{R} \rightarrow$ RILUTTANZA MAGNETICA

$R_0 \gg R_{fe}$

$$\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_{fe} + \mathcal{R}_0 = \frac{l_{fe}}{S_{fe} \cdot \mu_{fe}} + \frac{l_0}{S_0 \cdot \mu_0}$$

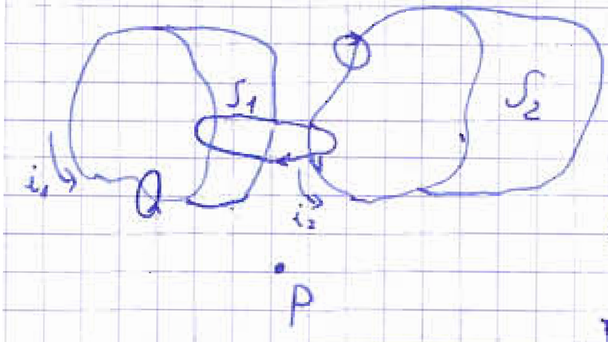
μ_0 è l'equivalente di ρ (conducibilità elettrica)



$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$

MUTUA INDUZIONE

Fenomeno che avviene quando un circuito percorso da corrente induce un flusso (una f.e.m.) in un secondo circuito.



$$\vec{B}(P) = \vec{B_1}(P) + \vec{B_2}(P) \quad \forall P$$

$$\Phi_{C11} = \int_{S_1} \vec{B_1} \cdot \hat{n} \cdot dS \qquad \Phi_{C22} = \int_{S_2} \vec{B_2} \cdot \hat{n}\, dS$$

$$\Phi_{C12} = \int_{S_1} \vec{B_2} \cdot \hat{n}\, dS \qquad \Phi_{C21} = \int_{S_2} \vec{B_1} \cdot \hat{n}\, dS$$

flusso nel circuito 1 generato da i_2 $\xleftrightarrow{\text{molto bassi}}$ flusso nel circuito 2 generato da i_1

$$\Phi_{C1} = \Phi_{C11} + \Phi_{C12} \qquad \Phi_{C2} = \Phi_{C22} + \Phi_{C21}$$

$$B = \mu_0 \cdot H \qquad H \propto I \implies \underbrace{B \propto I \qquad \Phi \propto B}_{\Phi \propto I}$$

se non ho variazione di geometria del sistema

considero materiali non ferromagnetici, in particolare l'ARIA

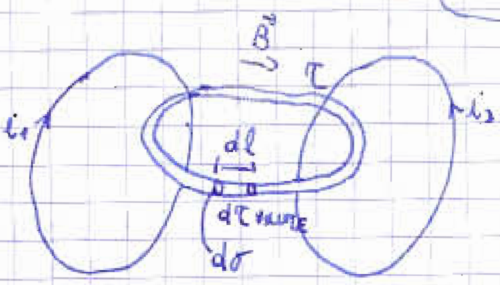
$$\boxed{\Phi = L \cdot I}$$

L → costante chiamata INDUTTANZA [H] (Henry)

$$\Phi_{C11} = L_1 \cdot I_1 \qquad \Phi_{C12} = L_{12} \cdot I_2 \quad L_{12} \to M_{12}$$

$$\Phi_{C22} = L_2 \cdot I_2 \qquad \Phi_{C21} = L_{21} \cdot I_1 \quad L_{21} \to M_{21}$$

17/11/08



$$\psi = \int_\tau \underbrace{\mu \cdot \vec{H_1}}_{\vec{B_1}} \vec{H_2}\, d\tau = \int_\sigma \int_l \vec{B_1} \cdot \vec{H_2}\, d\sigma\, d\vec{l} =$$

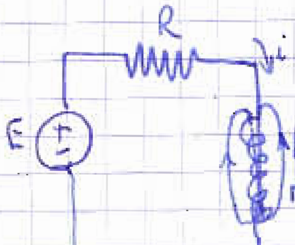
$\vec{B_1}$: campo di induzione magnetica

$$= \int_\sigma \vec{B_1}\, d\sigma \cdot \int_l \vec{H_2}\, d\vec{l} =$$

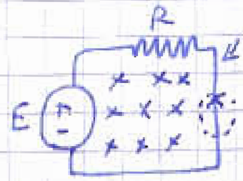
$$= \int_\sigma d\Phi_1 \cdot \int_l \vec{H_2}\, d\vec{l} = \Phi_{C21} \cdot i_2 = M_{21} \cdot i_1 \cdot i_2 = M_{12} \cdot i_2 \cdot i_1$$

Φ_{C21}: flusso generato da 1 concatenato a 2; i_2: legge di Ampère

$$M_{21} = M_{12} \doteq M$$ (trascurata nel corso)



N spire + 1 del circuito → trascurabile per N grande



spira. Campo entrante.

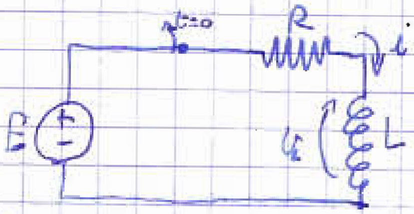
$$e = -\frac{d\phi_c}{dt} \Rightarrow \phi_c = B \cdot S$$

In regime q.s., $\frac{dB}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = e$ Il campo all'interno dell'induttore sarà N volte quello fuori.

$$e = -d\Phi_c \cdot \frac{1}{dt} = \boxed{L \cdot \frac{di}{dt}}$$

$$\int dW = \int_0^T e \cdot i \cdot dt = \int_0^{\Phi_c} d\Phi \cdot i = \int_0^I L \cdot i \cdot dt = \frac{1}{2} L \cdot$$

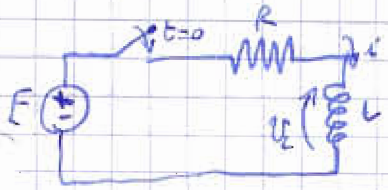
energia per caricare l'induttore con corrente I



$t<0 \quad i = \frac{E}{R}$ perchè $\frac{di}{dt} = 0$ (regime q.s.)

$t>0 \quad \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} \to -\infty \qquad v_L = L \cdot \frac{di}{dt}$

Per valori alti di L si viene a creare una grossa V che può superare le barriere dell'aria e ricollegare i conduttori creando una scintilla.

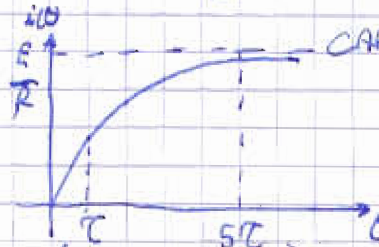


$E = L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i \qquad i(t) = K_i \cdot e^{-\frac{R}{L} t} + i_{p}(t)$ → corrente che resta a regime → forma del generatore

i_{p} PARTICOLARE $= E/R$

cond. iniziale $\quad i(0) = 0 \quad K_i \cdot e^0 + \frac{E}{R} = 0 \quad K_i = -\frac{E}{R}$

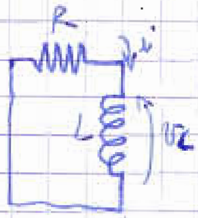
$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right)$$



CARICA INDUTTORE

$$\tau = \frac{L}{R}$$

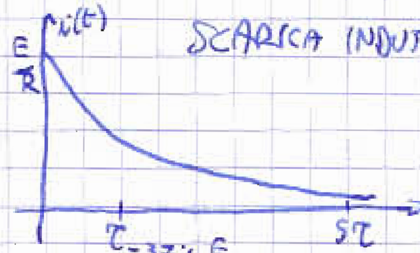
$i(\tau) = 63\% \frac{E}{R} \qquad i(5\tau) = 99\%\ i(\infty) = 99\%\ E/R$



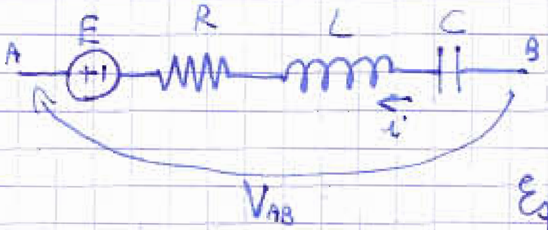
induttanza carica → tende a mantenere costante la ΔV → generatore ideale

in $t=0$ la vedo come generatore di corrente

$0 = L \cdot \frac{di}{dt} + R_i \qquad i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$



SCARICA INDUTTORE

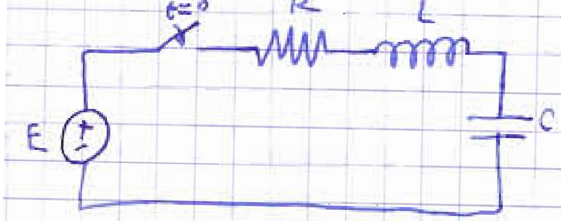


$$V_{AB} = E(t) - \frac{L\,di(t)}{dt} - R \cdot i(t) - \frac{1}{C} \int i(t)\,dt$$

Equazione differenziale di ordine n, dove n è il numero di componenti reattivi (2 in questo caso).

In generale ottengo $a_n \cdot \frac{d^n i}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 \cdot i = b(t)$

$$i(t) = \sum_{h=1}^{n} K_{\alpha h} \cdot e^{\alpha_h t} + i_p(t) \qquad \lim_{t \to +\infty} i(t) = i_p(t)$$



$$E(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt \quad \text{derivo}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = L\frac{d^2i}{dt^2} + R\cdot\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\cdot i$$

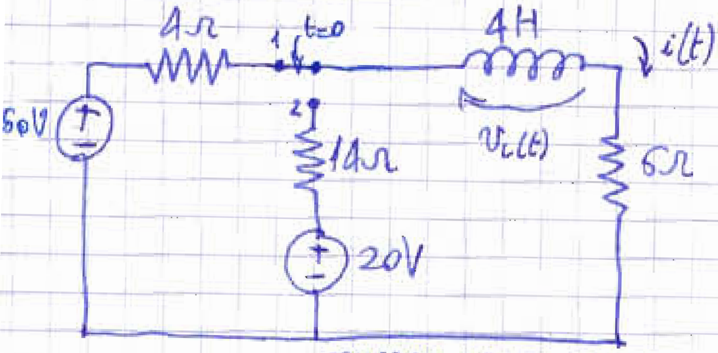
eq. car. $L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0$ $\quad \alpha = \underbrace{\frac{-R}{2L}}_{\alpha_r} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{K_r}} = -\alpha_r \pm \sqrt{K_r}$

Se le soluzioni di K_r sono reali e distinte, $i(t) = K_1 e^{[-\alpha_r+\sqrt{K_r}]t} + K_2 e^{[-\alpha_r-\sqrt{K_r}]t}$

$t=0$ $\quad E(0) = L\left(\frac{di}{dt}\right)_0 + Ri\big|_0 + V_{C0}$ $\quad i_0 = i_{L0} = \varnothing$

	$t=0^-$	$t=0^+$
$i=i_L$	0	0
v_C	V_{C0}	V_{C0}

20/11/08

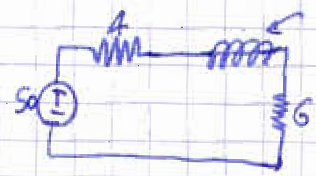


$i(t) = ?$

$v_L(t) = ?$

In questa posizione da $t \gg \tau$

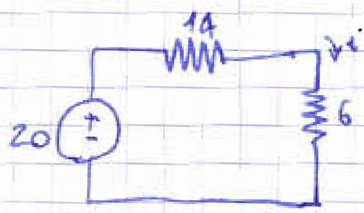
	REGIME INIZ. $t=0^-$	TRANSITORIO $t=0^+$	REGIME FINALE $t\to\infty$
i	5	5	1
v_L	0	−80	0

$t=0^-$ $(t<0)$ $\rightarrow$ 

a regime filo

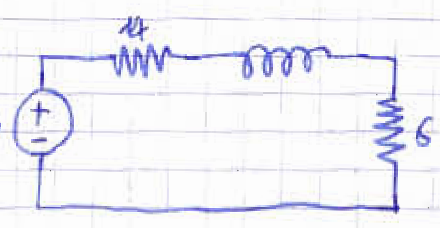
$v_L = \frac{\partial i}{\partial t} = 0$ $\quad i = \frac{50}{4+6} = 5A$

$i(0^-) = i(0^+)$ perché la corrente non può cambiare istantaneamente

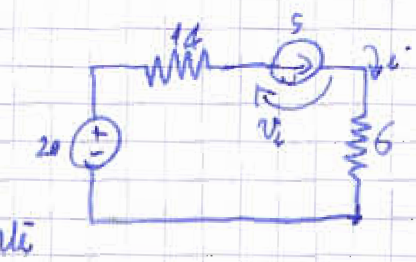
$t \to \infty$ 

$i = \frac{20}{14+6} = 1A \qquad v_L = 0$

A regime, l'induttore è assimilabile a un corto circuito.

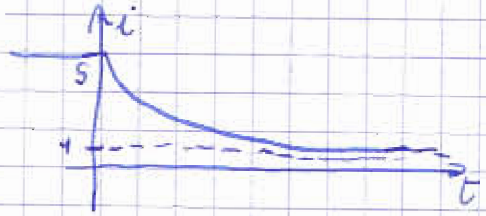
$t=0^+$ 

In 0^+ l'induttore lo posso sostituire con un generatore di corrente di $i(0^-)$

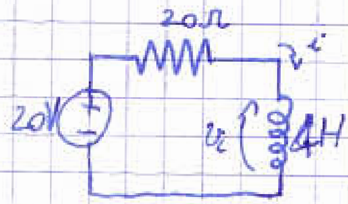


$20 = (14+6)\cdot i + V_L$ 2ª legge di Kirchhoff $20 = 100 + V_L \Rightarrow V_L = -80\ V$

Mi aspetto



$t>0$



$V_L(t) = L\cdot\frac{di(t)}{dt}$

$20 = 20\cdot i(t) + L\cdot\frac{di(t)}{dt}$ $\quad 20 = 20\,i(t) + 4\cdot\frac{di(t)}{dt}$

$5 = 5i + i'$ $\quad i' + 5i = 5$ $\quad$ eq. car. $\lambda + 5 = 0$ $\quad \lambda = -5$

$i(t) = A\cdot e^{-5t} + i_{p.}(t)$

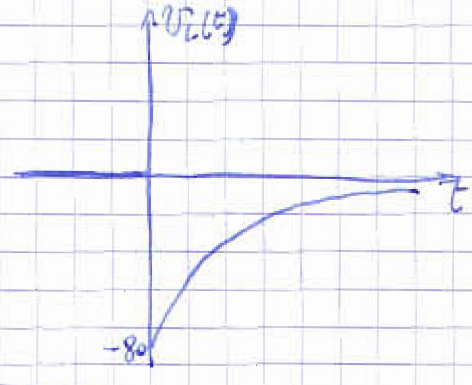
↳ valore della corrente $t \to +\infty \Rightarrow 1A$

$i(t) = A\cdot e^{-5t} + 1$ $\quad$ condizione iniziale $i(0) = 5$ $\quad 5 = A\cdot e^{0} + 1$ $\quad A = 4$

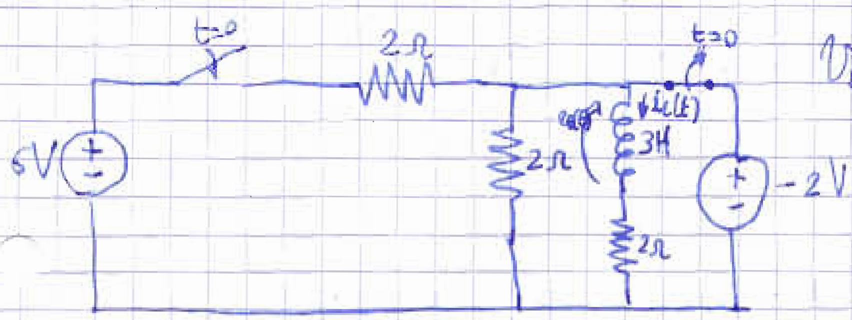
$i(t) = 4e^{-5t} + 1$

Per trovare $V_L(t)$ o riscrivo una equazione differenziale oppure applico la legge costitutiva dell'induttanza, cioè:

$v_L(t) = 4\cdot\frac{di(t)}{dt} = 4\cdot 4\cdot(-5)\cdot e^{-5t} = -80e^{-5t}$ $\quad v_L(0) = -80\ V$ ok



ESERCIZIO 2 DI ESAME!



$V_L(t) = ?$

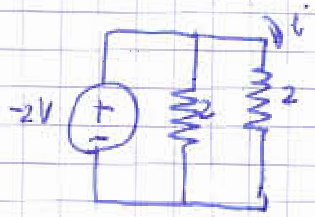
$i_L(t) = ?$

$= \boxed{t=0^-}$

	$t<0$	$t=0^+$	$t\to\infty$
i_L	-1	-1	1
V_L	0	6	0

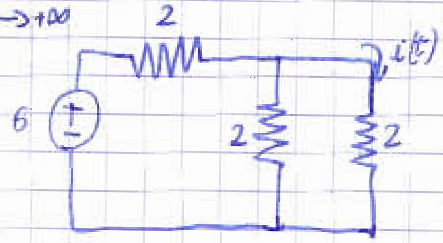
a regime nulla

$t = 0^-$, $t < 0$ L'induttore è cortocircuitato perché a regime

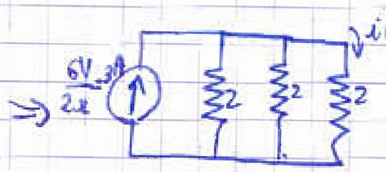


$$i_L(0^-) = \frac{-2V}{2\Omega} = -1A = i_L(0^+)$$

$t \to +\infty$

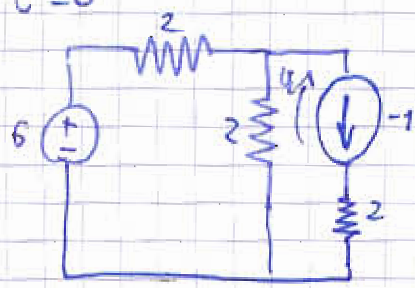


$\Rightarrow$



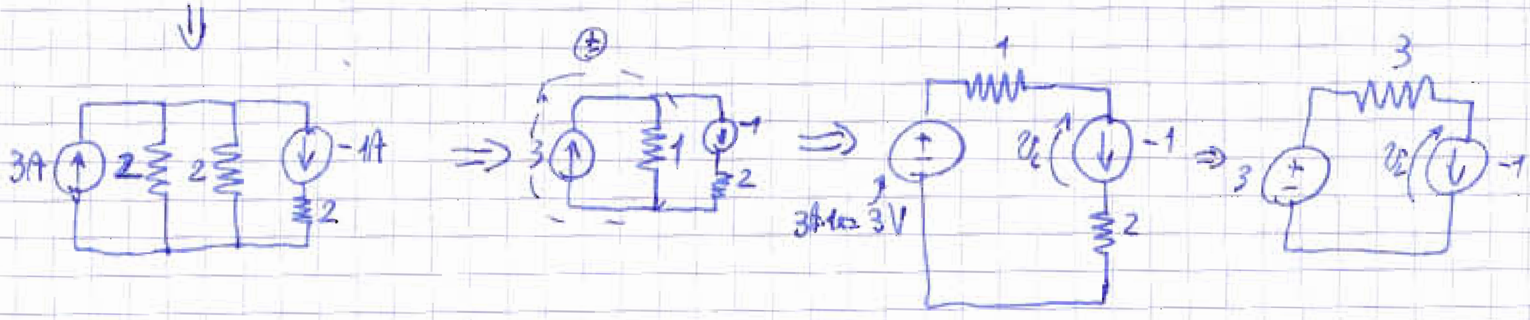
$i(t) = 1A$ perché $i = 3A$ si ripartisce uniformemente sui 3 rami (resistenze uguali)

$t = 0^+$



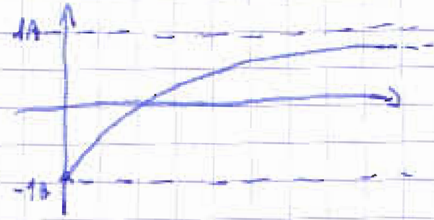
Per individuare il verso della freccia tengo lo stesso verso tenuto in precedenza.

$\Downarrow$

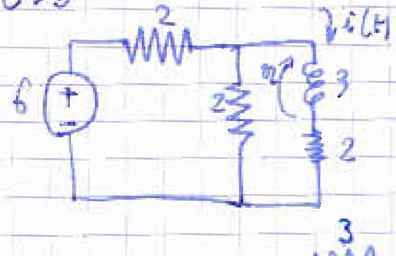


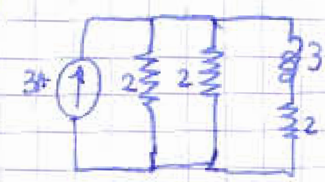
$3V = 3\Omega \cdot i + V_L \qquad 3 = 3 \cdot (-1) + V_L \qquad V_L = 6V$

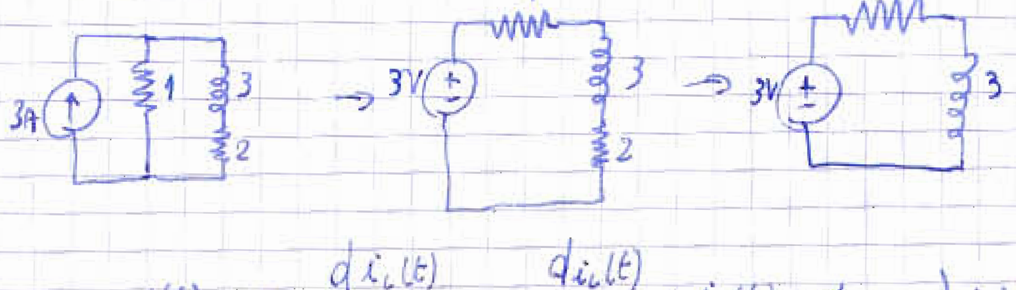
Mi aspetto



$t > 0$





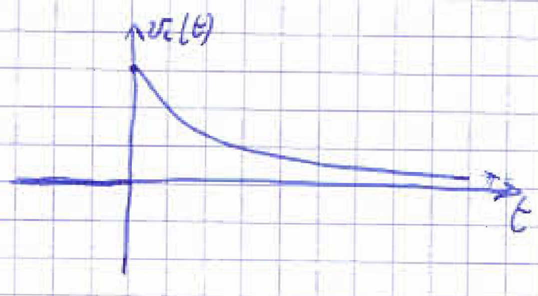


$$3 = 3 \cdot i_L(t) + 3 \cdot \frac{d i_L(t)}{dt} \qquad \frac{d i_L(t)}{dt} + i_L(t) = 1 \qquad \lambda + 1 = 0 \qquad \lambda = -1$$

$i_L(t) = Ae^{-t} + i_{L\infty}(t)$ $\quad i_{L\infty}(t) = i_L(+\infty) = 1$ $\quad i_L(t) = Ae^{-t} + 1$ $\quad$ cond. $i_L(0) = -1$

$-1 = Ae^{0} + 1 \quad A = -2 \quad i_L(t) = -2e^{-t} + 1$

$$V_L = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 3 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot e^{-t} = 6e^{-t}$$



$\tau = ?$ $\quad \tau = \frac{L}{R} = \frac{3H}{3\Omega} = 1s$

Nei transitori del 1° ordine ottengo sempre un andamento esponenziale negativo. Conoscendo $i(0)$, $i(\infty)$ e τ, l'equazione sarà

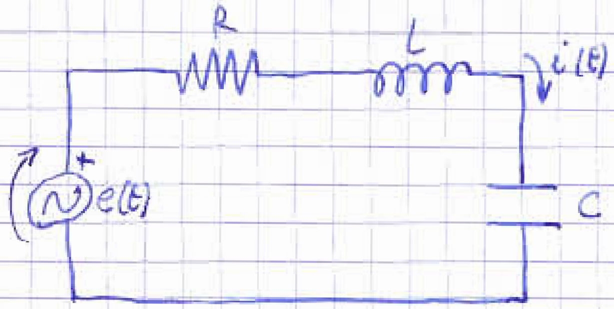
$i(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + i(\infty)$ $\quad$ A = escursione che deve fare l'esponenziale per passare da $i(0)$ a $i(\infty)$.

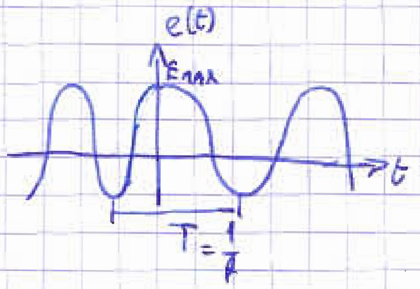
$$\tau = -\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\lambda}$$

Condensatore : $\tau = RC$

$i_C = C \cdot \frac{dv_C}{dt}$

$t = 0^+$ diventa un generatore di tensione





24/11/08

$e(t) = E_{MAX} \cdot \cos(\omega t + \alpha)$ $\quad$ ($\omega = 2\pi f$)

REGIME SINUSOIDALE → da un periodo all'altro non cambiano le grandezze che caratterizzano le sinusoidi (ampiezza, fase, periodo).

All'accensione del circuito si ha un transitorio che ignoriamo.

Se tutti i generatori sono sinusoidali, tutte le correnti saranno sinusoidali

$i(t) = I_{MAX} \cdot \cos(\omega t + \beta)$, così come tutte le tensioni. Tutte queste grandezze sono isofrequenziali. Per ogni funzione del tempo incognita abbiamo due grandezze incognite: AMPIEZZA e FASE.

$$e(t) = R\cdot i(t) + L\cdot\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt$$

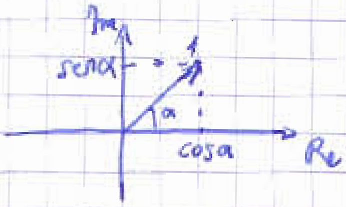
$$E_{MAX}\cdot\cos(\omega t+\alpha) = R\cdot I_{MAX}\cos(\omega t+\beta) - L\omega I_{MAX}\,sen(\omega t+\beta) + \frac{1}{C\omega}\cdot I_{MAX}\,sen(\omega t+\beta)$$

Per risolvere questi circuiti uso la TRASFORMATA DI STEINMETZ

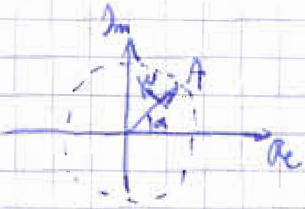
RIPASSO TRIGONOMETRIA

- FORMULA DI EULERO

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\,sen\alpha$$



$$A\cdot e^{j(\omega t+\alpha)} \rightarrow$$



Vettore che ruota con velocità $\omega = 2\pi f$

$$= \underbrace{A\cos(\omega t+\alpha)}_{\text{parte reale di } A\cdot e^{j(\omega t+\alpha)}} + j\underbrace{A\,sen(\omega t+\alpha)}_{\text{parte immaginaria di}}$$

$$e(t) = Re\left[E_{MAX}\cdot e^{j(\omega t+\alpha)}\right]$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I_{MAX}\cdot\cos(\omega t+\beta)\right) = -I_{MAX}\cdot\omega\cdot sen(\omega t+\beta) =$$

$$= -I_{MAX}\cdot\omega\cdot Im\left[e^{j(\omega t+\beta)}\right] = \ldots = j\omega\underbrace{I_{MAX}\,Re\left[e^{j(\omega t+\beta)}\right]}_{i(t)}$$

$$jRe(a+jb) = Re\left[j(a+jb)\right] = Re(ja-b) = -b = -Im(a+jb)$$

rendo a immaginario

La derivata la vedo come moltiplicazione per $j\omega$.

$$\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt = \ldots = \frac{1}{j\omega}\underbrace{I_{MAX}\cdot Re\left[e^{j(\omega t+\beta)}\right]}_{i(t)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}i(t) = j\omega\cdot i(t)\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt = \frac{i(t)}{j\omega}\end{array}}$$

Unendo tutto ottengo: → legge di Kirchhoff

$$E_{MAX}\,Re\left[e^{j(\omega t+\alpha)}\right] = R\cdot I_{MAX}\cdot Re\left[e^{j(\omega t+\beta)}\right] + L\cdot j\omega I_{MAX}\cdot Re\left[e^{j(\omega t+\beta)}\right] + \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{j\omega}I_{MAX}\,Re\left[e^{j(\omega t+\beta)}\right]$$

Se ↑ è valida, allora è valida anche per i vettori complessi completi:

$$E_{MAX}\cdot e^{j(\omega t+\alpha)} = R\cdot I_{MAX}\cdot e^{j(\omega t+\beta)} + j\omega L\,I_{MAX}\cdot e^{j(\omega t+\beta)} + \frac{1}{j\omega C}I_{MAX}\,e^{j(\omega t+\beta)}$$

$$E_{MAX}\cdot e^{j\alpha}\cdot \cancel{e^{j\omega t}} = \left[R I_{MAX}\cdot e^{j\beta} + j\omega L\cdot e^{j\beta}_{I_{MAX}} + \frac{1}{j\omega C}\, e^{j\beta}_{I_{MAX}}\right]\cancel{e^{j\omega t}}$$

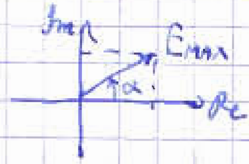
non dipende più dal tempo
↓
foto del sistema per $t=0$
↓
equivalente a $\forall t$ perché regime sinusoidale

Le due incognite rimaste sono I_{MAX} e β.

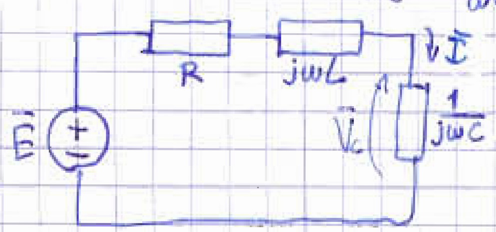
$$E_{MAX}\cdot e^{j\alpha} = I_{MAX}\cdot e^{j\beta}\cdot\left[R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right]$$

$$\underbrace{\boxed{E_{MAX}\cdot e^{j\alpha}}}_{\text{vettore rappresentativo di } e(t)} = \underbrace{I_{MAX}\, e^{j\beta}}_{\text{vettore rappresentativo di } i(t)}\cdot\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]$$ TRASFORMATA DI STEINMETZ

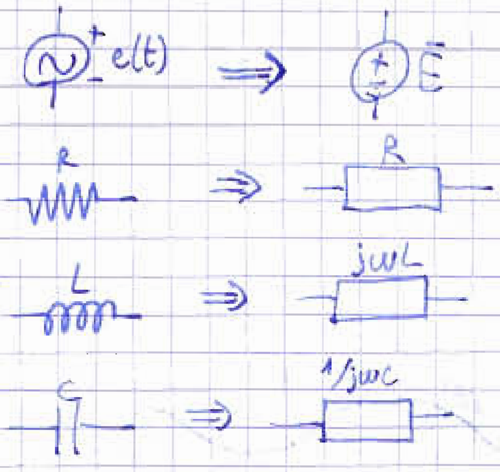
$\bar{E}$ vettore rappresentativo di $e(t)$ $\quad \bar{I}$ vettore rappresentativo di $i(t)$



$$\bar{I} = I_{MAX}\cdot e^{j\beta} = \frac{\bar{E}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{E_{MAX}\cdot e^{j\alpha}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$



Trasformo quindi il circuito con Steinmetz e poi posso usare tutti i metodi usati in continua (Kirchhoff, Thevenin, ...).



DEFINIZIONI

$\omega L \doteq X_L$ REATTANZA INDUTTIVA

$\frac{1}{\omega C} \doteq X_C$ REATTANZA CAPACITIVA

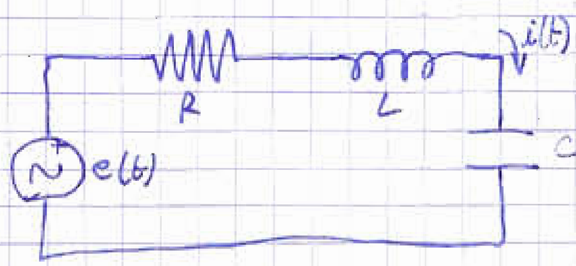
$X_L - X_C \doteq X$ REATTANZA $[\Omega]$

$R + jX \doteq \bar{Z}$ IMPEDENZA equivalente della resistenza in circuiti a regime sinusoidale $[\Omega]$

$\frac{1}{\bar{Z}} \doteq \bar{Y} = \underbrace{G}_{\text{CONDUTTANZA}} + j\underbrace{B}_{\text{SUSCETTANZA}}$ AMMETTENZA quanta corrente il circuito ammette

$$\boxed{G \neq \frac{1}{R} \qquad B \neq \frac{1}{X}}$$

27/11/08



$e(t) = 100\cos(\omega t)$

$R = 10\,\Omega$ $\qquad i(t) = ?$

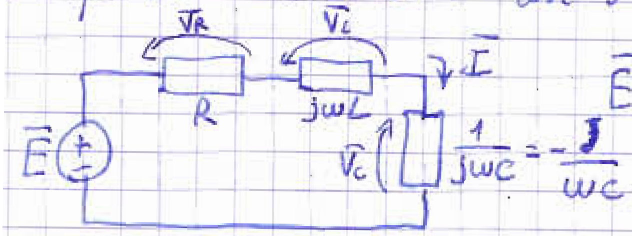
$L = 10$ mH

$C = 100\,\mu F$

$\omega = 314$ rad/s

$i(t) = I_{MAX} \cdot \cos(\omega t + \beta)$ perché ha lo stesso andamento di $e(t)$.

Trasformo il circuito con Steinmetz



$\overline{E} = E_{MAX}$ perché fase $\alpha = 0$ (altrimenti $E_{MAX} \cdot e^{j\alpha}$)

$\overline{E} = 100\,V$

$R = 10\,\Omega$

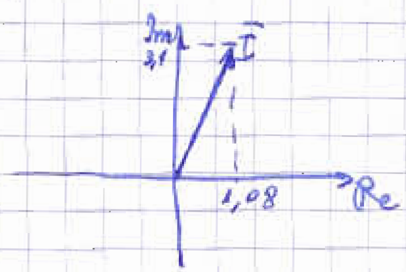
$j\omega L = j \cdot 314 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = j3{,}14\,\Omega$

$\frac{-j}{\omega C} = -j \cdot \frac{1}{314 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = -j \cdot 31{,}85\,\Omega$

$$\overline{I} = \frac{\overline{E}}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}} = \frac{100}{10 + j \cdot 3{,}14 - j\,31{,}85} =$$

$$= \frac{100}{10 - j\,28{,}71} = \frac{100(10 + j\,28{,}71)}{100 + 28{,}71^2} =$$

$$= \frac{1000 + j\,2871}{100 + 824{,}26} = 1{,}08 + j\,3{,}1$$

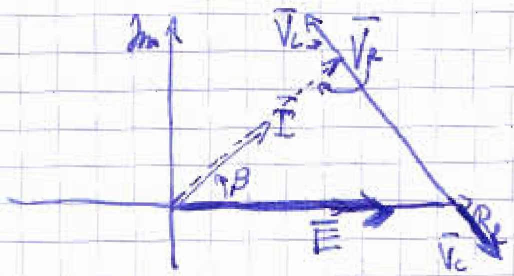


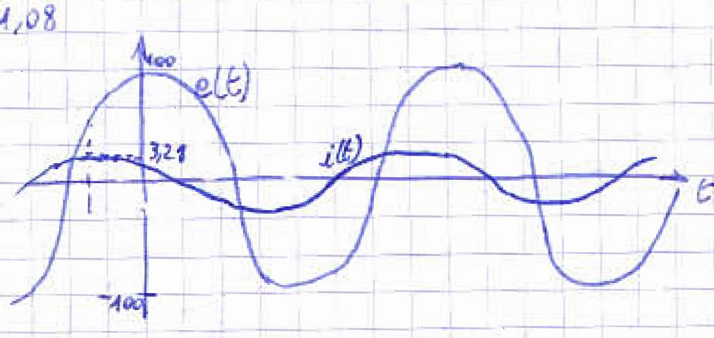
Per trovare $i(t)$, scrivo $\overline{I}$ in coordinate polari:

$|\overline{I}| = I_{MAX} = \sqrt{Re^2 + Im^2} = \sqrt{1{,}08^2 + 3{,}1^2} = 3{,}28\,A$

$\angle\overline{I} = \beta = \operatorname{arctg}\frac{Im}{Re} = \operatorname{arctg}\frac{3{,}1}{1{,}08} = 1{,}24\text{ rad} = 70{,}8°$

$i(t) = 3{,}28 \cos(\omega t + 70{,}8°)$.





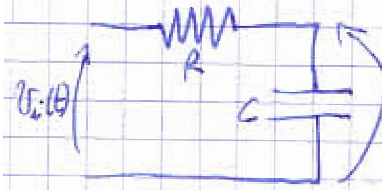
$\overline{V}_R$ stessa direzione di $\overline{I}$ perché $\overline{V}_R = R \cdot \overline{I}$ ma R è reale.

$\overline{V}_L = j\omega L \cdot \overline{I}$ cioè ho una scalatura e una rotazione di $\frac{\pi}{2}$.

$\overline{V}_C = -\frac{j}{\omega C} \cdot \overline{I}$ $\qquad \overline{E} = \overline{V}_R + \overline{V}_L + \overline{V}_C$

La corrente è in ritardo di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla tensione se ho un'induttanza mentre è in anticipo di $\frac{\pi}{2}$ se ho un condensatore.

FILTRO RC PASSA-BASSO



$\frac{|V_u|}{|V_i|} = ?$

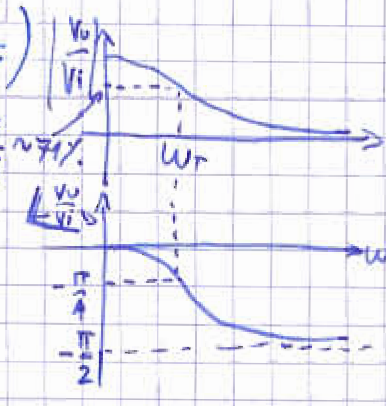
$\overline{V}_u = \frac{-\frac{j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}} \overline{V}_i =$

partitore di tensione

$= \frac{-\frac{j}{\omega C}}{\frac{R\omega C - j}{\omega C}} \overline{V}_i = \frac{1}{1+j\omega RC} \cdot \overline{V}_i$ $\quad \left|\frac{V_u}{V_i}\right| = \left|\frac{\frac{1}{1+j\omega RC} \cdot \overline{V}_i}{\overline{V}_i}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$

La funzione di trasferimento del filtro è sempre più bassa man mano che aumenta ω (e quindi la frequenza $f = \frac{\omega}{2\pi}$)

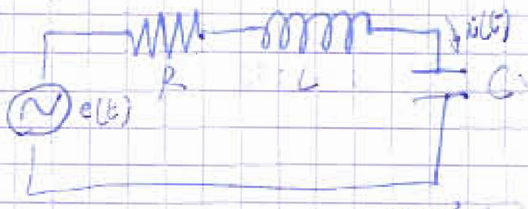
$\omega_T \rightarrow$ pulsazione di taglio $= \frac{1}{\sqrt{RC}}$. "Spartiacque" dei segnali che passano bene dai segnali che passano male.



Scambiando R e C otterrei un filtro passa-alto.

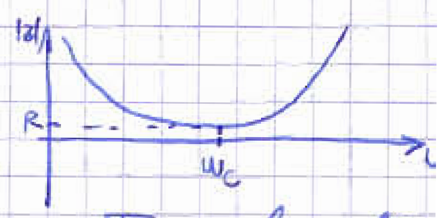
RISONANZA SERIE

Fenomeno in cui la componente reattiva di tipo induttivo a una certa frequenza ha un comportamento che si elide con la componente capacitiva.



$\overline{I} = \frac{\overline{E}}{\overline{Z}} = \frac{\overline{E}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$ esisterà ω_c tale che $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$.

$\omega_c \cdot L - \frac{1}{\omega_c \cdot C} = 0 \quad \frac{\omega_c^2 \cdot LC - 1}{\omega_c \cdot C} = 0 \quad \omega_c = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ l'effetto dei componenti reattivi si annulla.

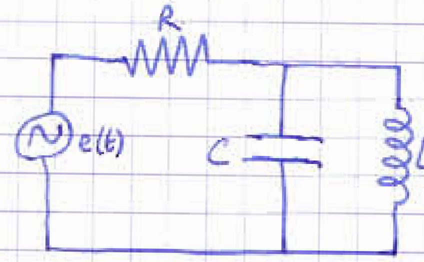


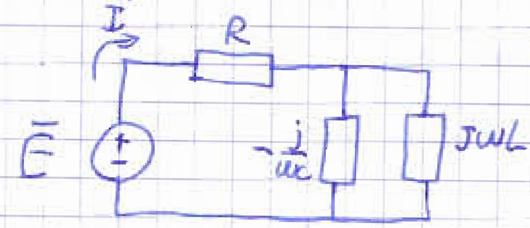
L'impedenza del circuito $Z = R$ è quindi REALE.

$\omega_c = 2\pi f_c$ $\quad f_c \rightarrow$ FREQUENZA DI RISONANZA.

Il circuito lascia passare la frequenza ω_c e attenua le altre. L e C si scambiano energia ma questo non viene visto dal generatore che vede solo la resistenza.

RISONANZA PARALLELO — FENOMENO DI ANTIRISONANZA



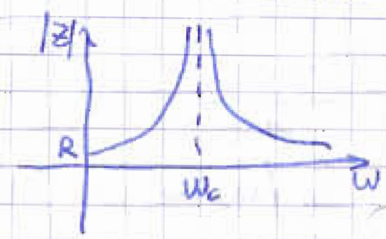


$$|\bar Z| = \left|\frac{\bar E}{\bar I}\right| = R + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L}+j\omega C} = R+\frac{j\omega L}{1+j^2\omega^2 CL} = R+\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

posso trovare una frequenza tale che $\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}\to\infty$

$\omega_c \Rightarrow 1-\omega^2 LC=0 \quad \omega_c=\frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow |\bar Z|\to\infty$

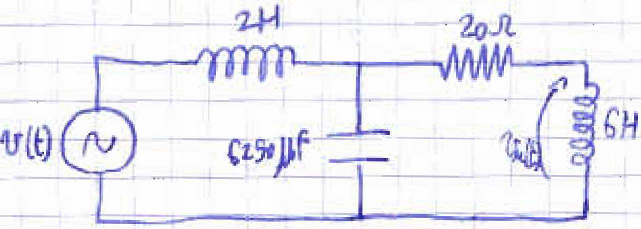
L'impedenza diventa quindi la più alta possibile



Utilizzato per eliminare una certa banda di frequenza.

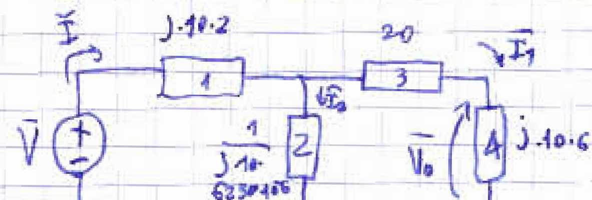
L e C si scambiano energia e non lasciano passare nessun segnale esterno.

01/12/08



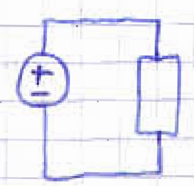
$v(t) = 40\cos(\overset{\omega}{10}t - \frac{\pi}{2})$

$v_o(t) = ?$



$\bar V = V_{max}\cdot e^{j\varphi} = 40e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\cdot 40$

Conviene utilizzare il metodo degli accorpamenti successivi (sempre in alternata) e poi il partitore.



1) accorpo 3 con 4 per ottenere $\boxed{5} = \boxed{3} + \boxed{4} = 20 + j60$

2) accorpo 2 con 5 in parallelo per ottenere $\boxed{6} = \boxed{2} // \boxed{5} =$

$$= \frac{-j\cdot 16\cdot(20+j60)}{20+44j} = \frac{240-80j}{5+11j}\cdot\frac{5-11j}{5-11j} = \frac{1200-880-400j-2640j}{25+121} =$$

$$= \frac{160}{73} - \frac{1520}{73} j$$

3) accorpo 6 con 1 ottenendo $\boxed{7} = \boxed{6} + \boxed{1} = \frac{160}{73} - \frac{1520}{73} j + 20j = \frac{160}{73} - \frac{60}{73} j$

$$\bar{I} = \frac{-j40}{\frac{160-60j}{73}} = \frac{-j \cdot 40 \cdot 73}{160-60j} \cdot \frac{160+60j}{160+60j} = 6-16j$$

Uso il partitore di corrente per capire come la corrente si spezza nei due rami:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \qquad \bar{I}_1 = \bar{I} \cdot \frac{\overbrace{\frac{1}{20+60j}}^{\text{AMMETTENZA RAMO}}}{\underbrace{\frac{1}{20+60j} + \frac{1}{-16j}}_{\text{AMMETTENZE COINVOLTE}}} = (6-16j) \cdot \frac{\frac{1}{20+6j}}{\frac{1}{20+60j} - \frac{1}{16j}} = -4+4j$$

$\bar{V}_0 = j \cdot 60 \cdot (-4+4j) = -240-240j$ Calcolo modulo e fase

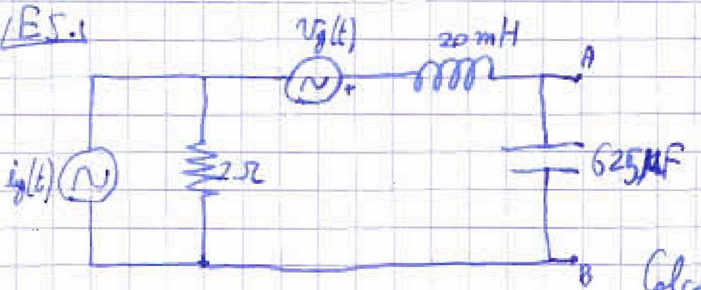
$\bar{V}_0 = V_{0_{MAX}} \cdot e^{j\alpha}$ $\qquad V_{0MAX} = \sqrt{240^2+240^2} = 339{,}2\ V$

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{-240}{-240} = -\frac{5}{4}\pi$ perché sono nel 3° quadrante

$$v_u(t) = 339{,}2 \cdot \cos\left(10t - \frac{5}{4}\pi\right)$$

Potevo considerare $v(t) = 40\cos(10t)$ per ottenere velocemente $\bar{V} = 40$, ma poi avrei dovuto sommare ad α $-\frac{\pi}{2}$ (solo con 1 generatore)

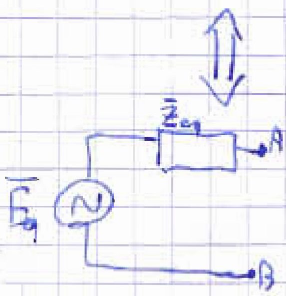
ES.1



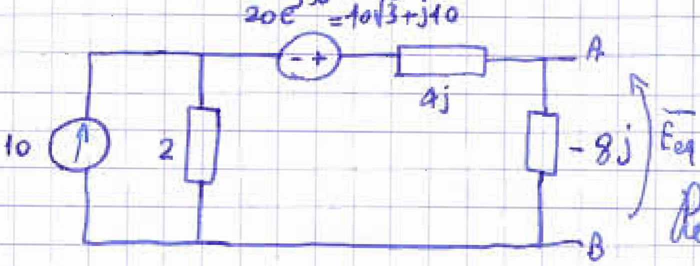
$i_g(t) = 10\cos(200t)$

$v_g(t) = 20\cos(200t + 30°)$

Calcolare l'equivalente Thevenin visto dai morsetti A

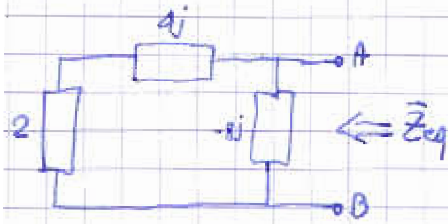


$\bar{Z}_{eq}$
- reale → resistenza
- immaginario con $+j$ → induttanza
- immaginario con $-j$ → condensatore



$$20e^{j30°} = a + jb = \begin{cases} a = 20\cos 30° \\ b = 20 \operatorname{sen} 30° \end{cases} = \begin{cases} a = 10\sqrt{3} \\ b = 10 \end{cases}$$

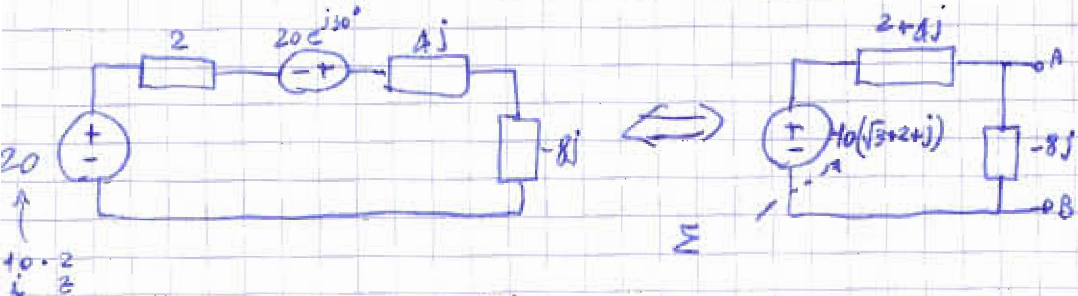
Per determinare $\bar{Z}_{eq}$ annullo tutti i generatori:



$$\bar{Z}_{eq} = (2+4j) // (-8j) = \frac{(2+4j)\cdot(-8j)}{2+4j-8j} = \frac{-16j+32}{2-4j} \cdot \frac{2+4j}{2+4j} =$$

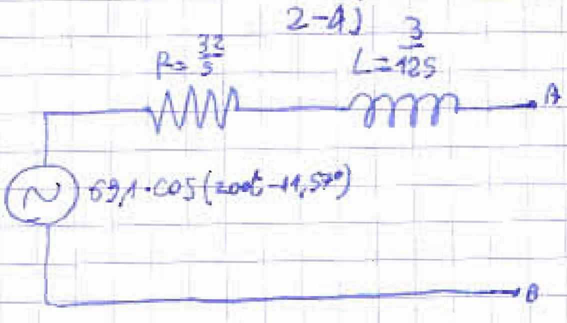
$$= \frac{-32j+64+64+128j}{4+16} = \frac{128+96j}{20} = \underset{\text{resist.}}{\frac{32}{5}} + \underset{\text{induttanza}}{\frac{24}{5}}j$$

Determino ora il generatore equivalente (V_{AB} a vuoto). Trasformo il generatore ideale di corrente in uno reale di tensione.



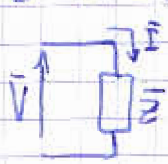
Uso il partitore di tensione

$$\bar{E}_{eq} = 10(\sqrt{3}+2+j)\cdot\frac{-8j}{2-4j} = 67{,}7 - 13{,}86j = 69{,}1\, e^{-j11{,}37°}$$

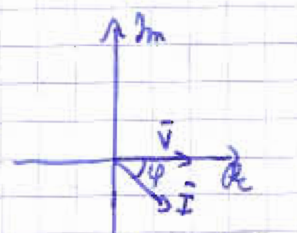


$$L = \frac{\frac{24}{5}\cancel{j}}{\underset{\omega}{200}\cancel{j}} = \frac{3}{125}$$

POTENZA



$$v(t) = V_M\cdot\cos(\omega t)$$
$$i(t) = I_M\cdot\cos(\omega t - \varphi)$$



$\varphi > 0$ $\bar{I}$ in ritardo su $\bar{V}$

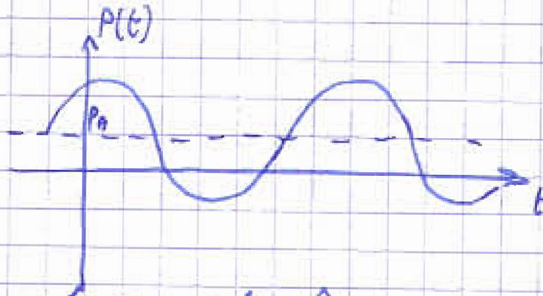
$\varphi < 0$ $\bar{I}$ in anticipo su $\bar{V}$

$$P(t) = v(t)\cdot i(t) = \underset{\text{ISTANTANEA}}{\text{POTENZA}} = V_M I_M \cdot \cos(\omega t)\cdot\cos(\omega t - \varphi) =$$

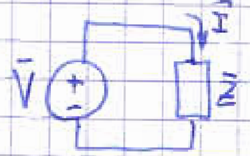
$$= \frac{1}{2} V_M I_M \left[\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi)\right] =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} V_M I_M \cos\varphi}_{\text{costante}} + \underbrace{\frac{1}{2} V_M I_M \cos(2\omega t - \varphi)}_{\text{variabile (nel tempo)}}$$

POTENZA ATTIVA — POTENZA FLUTTUANTE



La potenza attiva è il valor medio della potenza istantanea.



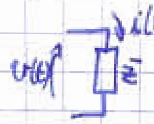
4/12/08

$$P(t) = P_A + P_F(t)$$

POTENZA ISTANTANEA — POTENZA ATTIVA (costante) — POTENZA FLUTTUANTE → frequenza doppia

P_A viene indicata semplicemente con P (potenza)

$$I_M \cos(\omega t - \varphi) = i(t)$$



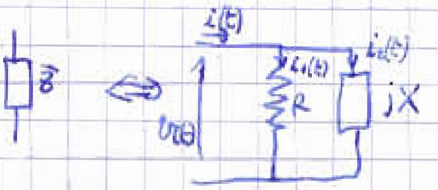
$$\varphi = \angle \bar{V} - \angle \bar{I}$$

$$I_M \left(\cos(\omega t)\cos\varphi + \text{sen}(\omega t)\,\text{sen}\varphi\right) = i(t)$$

$$i(t) = \underbrace{I_M \cos\varphi}_{\text{AMPIEZZA PARTE COSENO}} (\cos(\omega t)) + \underbrace{I_M \,\text{sen}\varphi}_{\text{AMPIEZZA PARTE SENO}} (\text{sen}(\omega t))$$

in fase con la tensione $v(t)$ → $i_1(t)$

in quadratura ($\varphi = 9$ con $v(t)$ → $i_2(t)$



$$P(t) = v(t) \cdot i(t) = \underbrace{V_M}_{\text{tensione}} I_M \cos(\omega t) \cos\varphi \cos(\omega t) + V_M I_M \cos(\omega t)\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}(\omega t) =$$

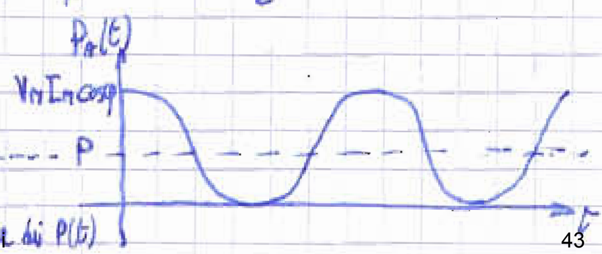
$$= \underbrace{V_M I_M \cos\varphi \cos^2(\omega t)}_{P_A(t)} + \underbrace{V_M I_M \,\text{sen}\varphi \cdot \frac{\text{sen}(2\omega t)}{2}}_{P_R(t)}$$

POTENZA ATTIVA ISTANTANEA (diversa da potenza attiva) → potenza dissipata da R

POTENZA REATTIVA ISTANTANEA → potenza elaborata dalla parte reattiva dell'impedenza.

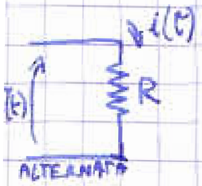
media nulla

$$P_A(t) = (V_M I_M \cos\varphi) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\right) = \underbrace{\frac{1}{2} V_M I_M \cos\varphi}_{P} + \frac{1}{2} V_M I_M \cos\varphi \cos(2\omega t)$$

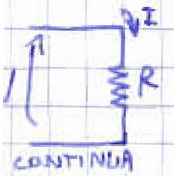


La potenza reattiva viene scambiata continuamente tra il generatore e i componenti reattivi, ma non svolge lavoro per il quale è stato costruito il circuito (lampadina).

VALORE EFFICACE



Consideriamo l'impedenza Z come una semplice resistenza (nessuna parte reattiva).

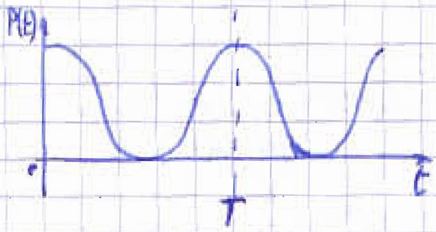


$$P_{CONTINUA} = R \cdot I^2$$

il $\cos\varphi$ non è considerato perchè in fase

$$P(t)_{ALTERNATA} = V_M I_M \cos^2(\omega t) = R I_M^2 \cos^2(\omega t)$$

Che relazione devo avere tra I e I_M per avere la stessa potenza media?



$$P_{MEDIA} = P_M = \frac{1}{T}\int_T R\, i^2(t)\, dt \quad \text{in alternata}$$

$$P = R \cdot I_{EFF}^2 \quad \text{in continua}$$

$$R \cdot I^2 = \frac{1}{T}\int_T R\, i^2(t)\, dt \qquad I_{EFF} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T i^2(t)\, dt} = I_{RMS}$$

VALORE QUADRATICO MEDIO (Root Mean Square)

Corrente che devo dare in un circuito in continua per avere la stessa potenza dissipata che nel caso della alternata genererebbe la forma d'onda $i(t)$.

<u>Se $i(t)$ è sinusoidale</u>: $i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi) \Rightarrow \boxed{I_{EFF} = I_{RMS} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}}$

$$P = R \cdot I_{EFF}^2 = R \cdot \frac{I_M^2}{2}$$

$I, V \rightarrow$ valore efficace

$I_M, V_M \rightarrow$ valore di picco ($M \rightarrow$ massimo)

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M \cos\varphi = V \cdot I \cdot \cos\varphi$$

$P_F(t) = V \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)$ $\qquad \varphi \rightarrow$ sfasamento tra V e I

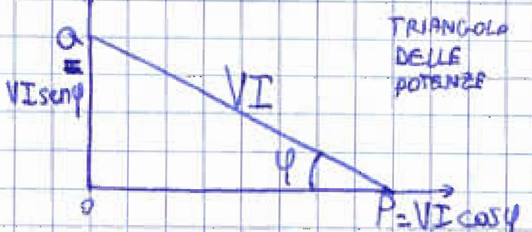
$P_A(t) = 2 \cdot V \cdot I \cos\varphi \cdot \cos^2(\omega t)$

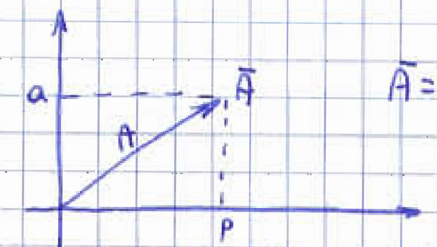
$P_R(t) = V \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen}(2\omega t)$

Più aumenta la componente reattiva, più aumenta φ, meno è alta la potenza attiva P.

$\cos\varphi \rightarrow$ FATTORE DI POTENZA (F.I.P.)

Definisco $Q \doteq \int_T P_R(t)\,dt = \frac{1}{2} V_M I_M \operatorname{sen}\varphi = V \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi$ POTENZA REATTIVA $\rightarrow$ equivalente di P per la potenza reattiva istantanea





$\bar{A} = P + jQ$ POTENZA COMPLESSA

$|\bar{A}| = A = V \cdot I$ $\leftarrow$ POTENZA APPARENTE o DI DIMENSIONAMENTO

$$\boxed{\bar{A} = P + jQ = \bar{V} \cdot \bar{I}^*}$$ $\leftarrow$ I complesso coniugato

$$= V \cdot \left(I e^{-j\varphi}\right)^* = V \cdot I \cdot e^{j\varphi} = VI\cos\varphi + jVI\operatorname{sen}\varphi = P + jQ$$ ▨

$$|\bar{A}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{V^2 I^2 \cos^2\varphi + V^2 I^2 \operatorname{sen}^2\varphi} = V \cdot I \sqrt{\underbrace{\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi}_{1}} = V \cdot I = A$$

POTENZE: RIASSUNTO

$P(t) = v(t) \cdot i(t)$ ISTANTANEA

- FLUTTUANTE $P_F(t)$ + ATTIVA P — REATTIVA Q $\rightarrow$ COMPLESSA $\bar{A} = P + jQ$ (fase / ampiezza)
- ATTIVA ISTANTANEA $P_A(t)$ + REATTIVA ISTANTANEA $P_R(t)$

$P_A(t)$: MEDIA = AMPIEZZA = P; $P_R(t)$: AMPIEZZA = Q

fase: φ = sfasamento di $i(t)$ rispetto a $v(t)$ $\rightarrow$ cos $\rightarrow$ FATTORE DI POTENZA (F.D.P.) $\cos\varphi$

ampiezza: APPARENTE $A = VI$

$P, Q, A \rightarrow$ potenze fondamentali (costanti) in elettrotecnica

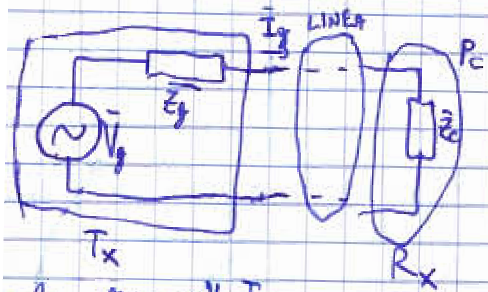
- A: VI [VA] Volt-Ampère
- Q: $VI\operatorname{sen}\varphi$ [VAR] Volt-Ampère Reattivi
- P: $VI\cos\varphi$ [W] Watt

Sempre Watt dal punto di vista fisico!

11/12/08

15/12/08

la prox lezione   ESAME 27/06/07



Il trasmettitore è un generatore reale di tensione.

Il carico è un'impedenza.

valore efficace: V_g, I_g

La linea di trasmissione è ideale (resistenza nulla)

Lo scopo è far arrivare la massima potenza al carico, fissata la tensione del generatore.

$\bar{Z}_g = R_g + jX_g$ $\quad \bar{Z}_c = R_c + jX_c \quad$ $\bar{V}_g = V_g$ reale (per semplificare i calcoli)

$\bar{I}_g = I_g \cdot e^{j\varphi_i}$ ← angolo di sfasamento tra tensione e corrente

$\bar{A}_g = V_g \cdot \underbrace{I_g \cdot e^{-j\varphi_i}}_{\bar{I}_g^*} = P_g + jQ_g$

complesso coniugato; P_g ← potenza attiva; Q_g ← potenza reattiva

$P_g = Re[\bar{A}_g] \overset{\text{formula Eulero}}{=} V_g I_g \cdot \cos\varphi_i$

$P_{Rg} = R_g \cdot I_g^2$ = potenza che dissipo e non mi interessa

P_{Rg}: potenza dissipata dalla parte resistiva di $\bar{Z}_g$

$P_{Rc} = P_g - P_{Rg} = V_g I_g \cdot \cos\varphi_i - R_g I_g^2 = f(\varphi_i, I_g)$ ← valore effic.

Devo massimizzare $f(\varphi_i, I_g)$. Condizioni:

1) $\cos\varphi_i = 1 \Rightarrow \varphi_i = 0$ → sono nella condizione di risonanza serie $\Rightarrow X_c = -X_g$

$P_{Rc} = V_g I_g - R_g I_g^2 = f(I_g)$

2) $f'(I_g) = 0 \Rightarrow V_g - 2R_g I_g = 0 \Rightarrow I_g = \dfrac{V_g}{2R_g} \overset{\text{condizioni risonanza}}{=} \dfrac{V_g}{R_g + R_c} \Rightarrow R_g = R_c$

CONDIZIONI DI MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA O ADATTAMENTO DI IMPEDENZA:

- $X_c = -X_g$
- $R_g = R_c$

Metà della potenza è dissipata su $\bar{Z}_g$ e metà su $\bar{Z}_c$.

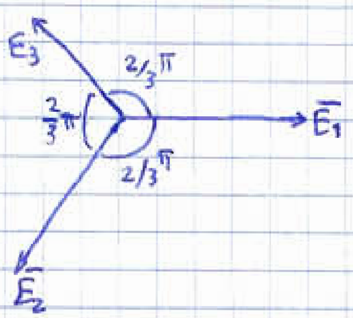
Sistemi Trifase

I generatori generano 3 sinusoidi a stessa frequenza e ampiezza sfasate tra loro di 120°.

$$e_1(t) = \overbrace{\sqrt{2}\cdot E}^{\text{valore di picco}} \cos(\omega t) \qquad \bar{E}_1 = E$$

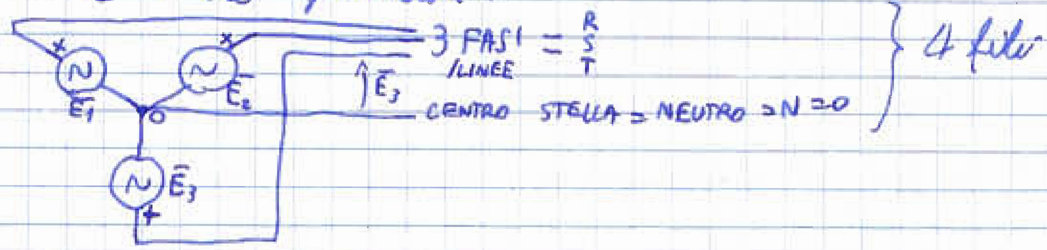
$$e_2(t) = \sqrt{2}\cdot E \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \qquad \bar{E}_2 = E\cdot e^{-j\frac{2}{3}\pi}$$

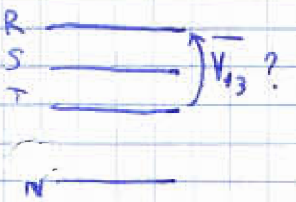
$$e_3(t) = \sqrt{2}\cdot E \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) = \sqrt{2}\cdot E \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \qquad \bar{E}_3 = E\cdot e^{j\frac{2}{3}\pi}$$



$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$ Il sistema trifase è un sistema equilibr

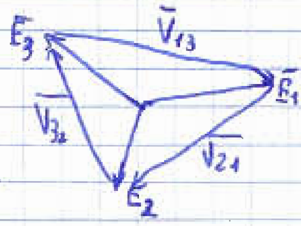
Per ridurre il numero di fili posso collegare a stella i tre generatori:





$\bar{V}_{13} = \bar{E}_1 - \bar{E}_3$

tensione concatenata

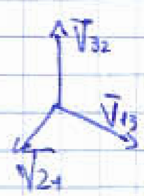


Ci sono 3 tensioni concatenate o tensioni di linea $\bar{V}_{13}$, $\bar{V}_{21}$ e $\bar{V}_{32}$

$|\bar{V}_{13}| = \sqrt{3}\cdot E$ cioè $V = \sqrt{3}\cdot E$

$\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$ = TENSIONI DI FASE o STELLATE

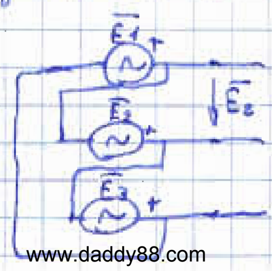
$\bar{V}_{13}, \bar{V}_{21}, \bar{V}_{32}$ = TENSIONI CONCATENATE o DI LINEA



anche le tensioni concatenate formano una terna trifase equilibrata

$$\bar{V}_{13} + \bar{V}_{21} + \bar{V}_{32} = 0$$

Collegando invece i tre generatori a TRIANGOLO si hanno solo 3 fili:

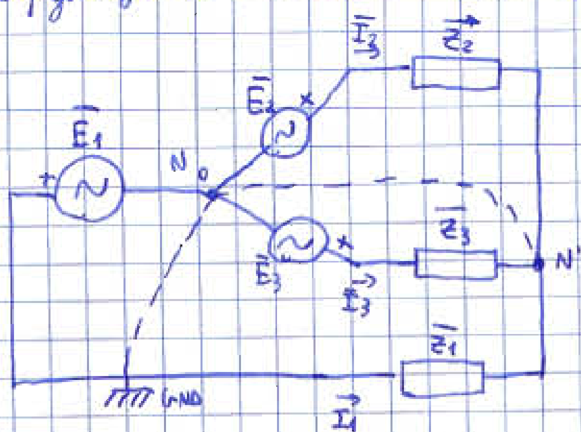


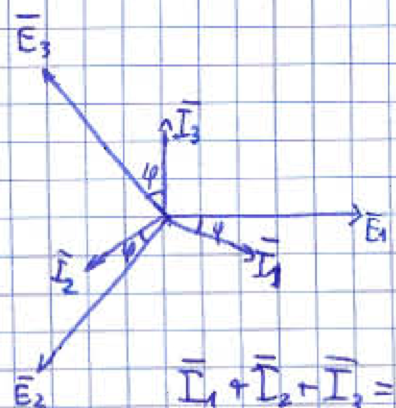
Le tensioni di linea sono uguali alle tensioni dei generatori

Anche le impedenze si possono mettere a stella o a triangolo. 4 casi:

- STELLA - STELLA   generatori - impedenze
- TRIANGOLO - TRIANGOLO
- STELLA - TRIANGOLO
- TRIANGOLO - STELLA

Configurazione STELLA - STELLA (più usato)





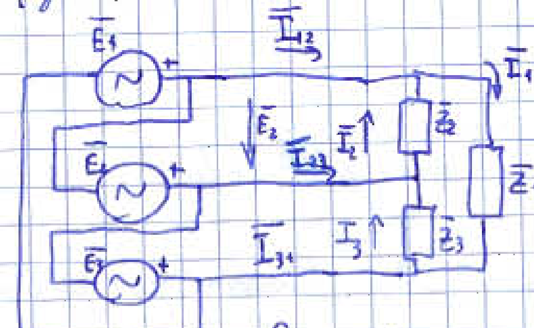
$$\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0$$

Questo collegamento forza la somma delle tre correnti ad essere 0.
N' non sarà nullo perché deve forzare $\sum_i \overline{I}_i = 0$ anche nel caso in cui le impedenze non siano equilibrate. N' inizia a "ballare" intorno allo 0.
Per evitare N' ballerino, si collegano i due centri stella. In questo modo $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$ e $\overline{I}_3$ si dovranno adattare alle condizioni $\sum_i \overline{I}_i = 0$ e $N = N' = 0$.
Creo quindi tre circuiti indipendenti: ogni carico è alimentato da un solo generatore.

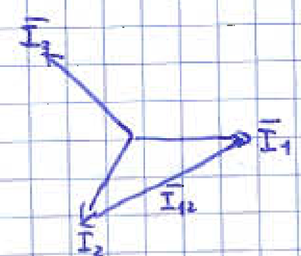
⏚ → TERRA si ancora al potenziale del terreno (filo verde-giallo) permettendo di non prendere la scossa. GND = G = GROUND.

5 cavi: R, S, T, N, TERRA.

Configurazione TRIANGOLO - TRIANGOLO



$$\overline{I}_{12} = I_1 - I_2$$
$$\overline{I}_{23} = I_2 - I_3$$
$$\overline{I}_{31} = I_3 - I_1$$



Basse tensioni - alte correnti: si fa all'interno di stabilimenti

B.T. (bassa tensione) ⇒ $E = 230\,V$ $V = \sqrt{3} \cdot E \simeq 400\,V$

Una volta era $E = 220\,V$ e $V = 380\,V$.

18/12/08

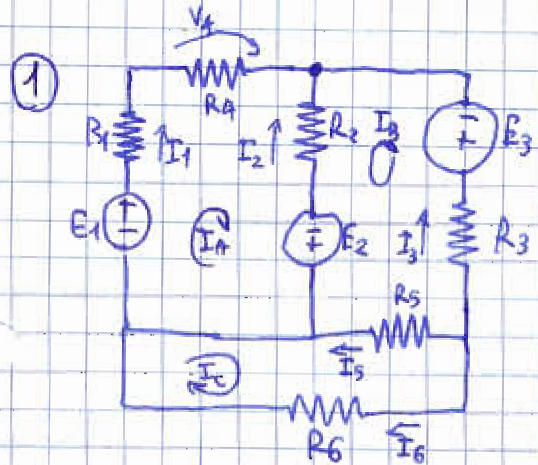
ESAME 27/06/2008

MATRICOLA 1 2 3 4 5 6
$K_6\ K_5\ K_4\ K_3\ K_2\ K_1$

$E_1 = 56$ $E_2 = 24$ $E_3 = 34$ $R_1 = 35$ $R_2 = 50$ $R_3 = 55$

$R_4 = 64$ $R_5 = 86$ $R_6 = 20$ $T_1 = 140\,\mu s$ $L = 250\,mH$ $C = 10\,\mu F$

(1)



Cerco i valori di $I_1, I_2, I_3, I_5, I_6, V_4$

Applico il metodo di Maxwell alle maglie

$$\begin{vmatrix} E_1+E_2 \\ -E_2+E_3 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1+R_2+R_4 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_5+R_6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{vmatrix}$$

generatori che incontro percorrendo la maglia come la corrente di maglia

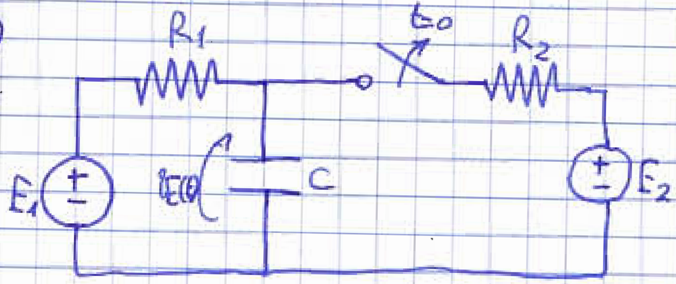
resistenza tra A e B cambiata di segno

resistenze di maglia

$$\begin{vmatrix} 80 \\ 10 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 149 & -50 & 0 \\ -50 & 191 & -86 \\ 0 & -86 & 106 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{vmatrix} \ldots \begin{cases} I_A = 0{,}655\,A \\ I_B = 0{,}353\,A \\ I_C = 0{,}286\,A \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = I_A = 0{,}655\,A \\ I_2 = I_B - I_A = -0{,}302\,A \\ I_3 = -I_B = -0{,}353\,A \\ I_5 = I_B - I_C = 0{,}067\,A \\ I_6 = I_C = 0{,}286\,A \end{cases}$$

$$V_4 = R_4 \cdot I_4 \overset{I_4 = -I_1}{=} -R_4 \cdot I_1 = -64\,\Omega \cdot 0{,}655\,A = -41{,}94\,V$$

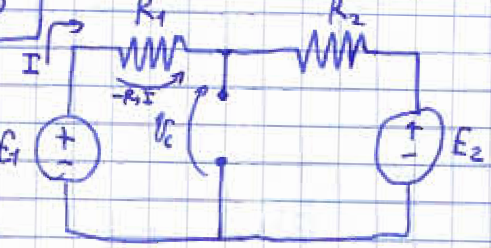
② 

Andamento di $v_C(t)$ nel tempo?

$v_C(T_1) = ?$

	$t=0^-$	$t=0^+$	$t \to +\infty$
v_C	$\frac{E_1R_2+E_2R_1}{R_1+R_2}$	$\frac{E_1R_2+E_2R_1}{R_1+R_2}$	E_1

$\boxed{t=0^-}$ condensatore = circuito aperto

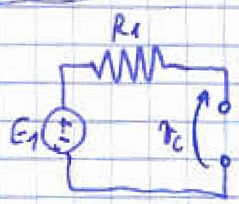


Per il 2° principio di Kirchhoff

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = 0{,}376\,A$$

$$v_C(0^-) = E_1 - R_1 \cdot I \left(= R_2 I + E_2\right) = E_1 - \frac{R_1E_1 - R_1E_2}{R_1+R_2} = \frac{\cancel{E_1R_1} + E_1R_2 - \cancel{R_1E_1} + R_1E_2}{R_1+R_2} = \frac{E_1R_2+E_2R_1}{R_1+R_2}$$

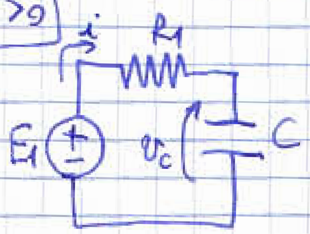
$\boxed{t \to +\infty}$



La corrente vale $0 \Rightarrow \Delta V_{R_1} = 0 \Rightarrow E_1 - v_C = 0 \Rightarrow E_1 = v_C$.

$$v_C\Big|_{t\to+\infty} = E_1$$

$\boxed{t>0}$



$$E_1 - R_1 \cdot i(t) - v_C(t) = 0 \qquad \text{2ª legge di Kirchhoff}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} \qquad \text{segno + perché convenzione utilizzatore}$$

$$E_1 - R_1 \cdot C \frac{dv_C(t)}{dt} - v_C(t) = 0 \qquad \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R_1 \cdot C} = \frac{E_1}{R_1 \cdot C} \qquad \alpha + \frac{1}{R_1C} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{R_1 \ldots}$$

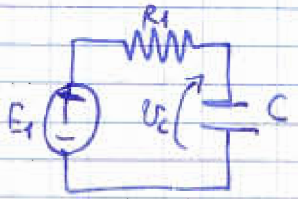
$$v_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{R_1C}} + \underbrace{v_{C,\,i.p.}(t)}_{\substack{\text{valore finale} \\ \text{di } v_C(t) \\ \downarrow \\ E_1}}$$

$$\begin{cases} v_C(t) = E_1 + A\,e^{-\frac{t}{R_1C}} \\ v_C(0) = E_1 + A = \dfrac{E_1R_2+E_2R_1}{R_1+R_2} \end{cases}$$

$$A=\frac{\cancel{E_1R_2}+E_2R_1-E_1R_1-\cancel{E_1R_2}}{R_1+R_2}=\frac{E_2R_1-E_1R_1}{R_1+R_2}$$

$$v_c(t)=\frac{E_2R_1-E_1R_1}{R_1+R_2}\cdot e^{-\frac{t}{R_1C}}+E_1. \qquad v_c(T_1)=47{,}17V$$

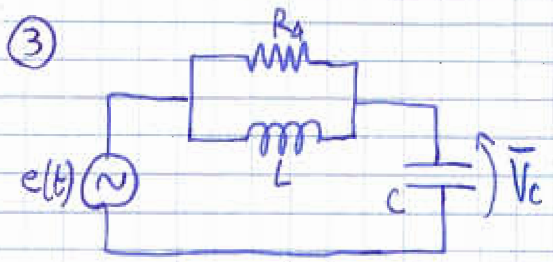
OPPURE



transitorio 1° ordine : $\tau=R_1\cdot C$

$$v_c(t)=(v_c(0)-v_c(+\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}+v_c(+\infty)$$

③



$|\bar{V}_c|=?$

$\angle V_c=?$

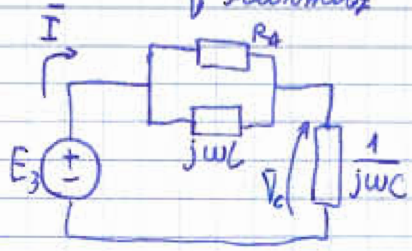
$v_c(t)=?$

$P, A=?$

potenza attiva, potenza apparente

$$e(t)=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{valore di picco}}}{E_3}\cos(\underbrace{2\pi\overset{\substack{\text{frequenza}\\ \downarrow}}{50}}_{\omega}t)$$

Steinmetz



$$\bar{\bar{Z}}=\frac{R_4\cdot j\omega L}{R_4+j\omega L}+\frac{1}{j\omega C}=\frac{j\omega C(R_4\cdot j\omega L)+R_4+j\omega L}{j\omega C(R_4+j\omega L)}=$$

$$=\frac{R_4-\omega^2LR_4C+j\omega L}{-\omega^2LC+j\omega R_4C}=\frac{48{,}21+j78{,}54}{-0{,}247+j0{,}201}\cdot\frac{-0{,}247-j0{,}201}{-0{,}247-j0{,}201}=\ldots=38{,}25-j286{,}9$$

$$\bar{I}=\frac{E_3}{\bar{\bar{Z}}}=\frac{34}{38{,}25-j286{,}9}=0{,}0156+j0{,}116 \qquad \bar{A}=\frac{1}{2}\cdot E_3\cdot\bar{I}^*=\frac{1}{2}\cdot 34\cdot(0{,}0156-j0{,}116)$$

perché ho usato i valori di picco

$$=\overset{P}{0{,}265}-j\overset{Q}{1{,}979}$$

$P=0{,}265\ W$

$A=|\bar{A}|=\sqrt{P^2+Q^2}=1{,}996\ VA$

$$\bar{V}_c=\bar{I}\cdot\frac{1}{j\omega C}=(0{,}0156+j0{,}116)\cdot\frac{1}{j0{,}00314}=$$

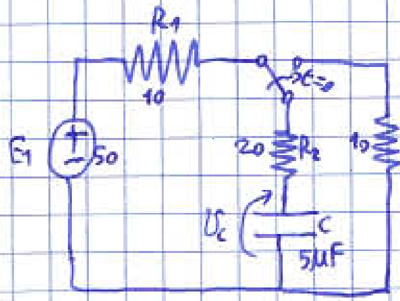
$$=37{,}05-j4{,}965$$

$$|\bar{V}_c| = \sqrt{37,05^2 + 4,965^2} = 37,38 \qquad \angle \bar{V}_c = \text{arctg}\frac{-4,965}{37,05} = -7,63°$$

$$v_c(t) = 37,38 \cdot \cos(2\pi 50 t - 7,63°)$$

in ritardo di 7,63° rispetto alla tensione del generatore

22/12/08

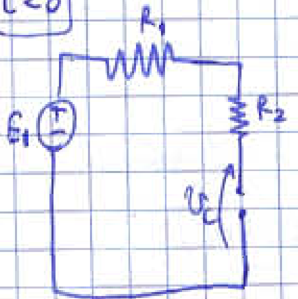


$v_c(t) = ?$

$v_c(100\mu s) = ?$

	$t<0$	$t=0^+$	$t\to+\infty$
v_c	E_1	E_1	0

$\boxed{t<0}$



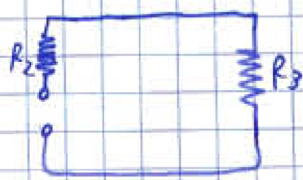
$i = 0$

$\Delta V_{R1} = \Delta V_{R2} = 0$

$E_1 - v_c = 0$

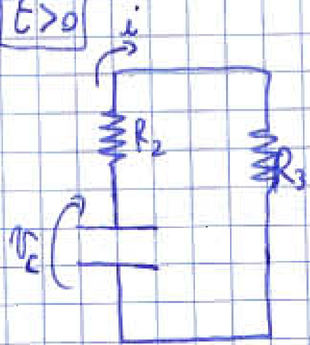
$v_c = E_1$

$\boxed{t \to +\infty}$



$v_c = 0$

$\boxed{t>0}$



$v_c - (R_2+R_3)\cdot i = 0$ 2ª legge di Kirchhoff

$i = -C\dfrac{dv_c}{dt}$ sto usando la convenzione del generatore

$v_c + C\cdot\dfrac{dv_c}{dt}(R_2+R_3) = 0$

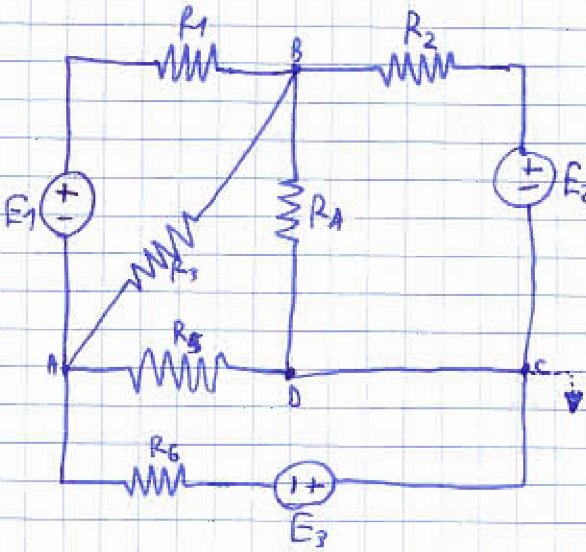
$\dfrac{dv_c}{dt} + \dfrac{1}{C(R_2+R_3)}\cdot v_c = 0 \qquad \alpha + \dfrac{1}{C(R_2+R_3)} = 0 \qquad \alpha = -\dfrac{1}{C(R_2+R_3)}$

$v_c(t) = A e^{-\frac{t}{C(R_2+R_3)}} + \underbrace{\cancel{v_{c\,i.p.}(t)}}_{=0}$

$$\begin{cases} v_c(0) = 50 \\ v_c(t) = A\left(e^{-\frac{t}{C(R_2+R_3)}}\right) \end{cases} \Rightarrow v_c(0) = A = 50$$

$v_c(t) = 50\cdot e^{-\frac{t}{5\mu F\cdot 30}}$

$v_c(100\mu s) = 50\cdot e^{-\frac{\cancel{100}^{\,2}\,\cancel{\mu}}{\cancel{5}\cancel{\mu}\cdot \cancel{30}^{\,3}}} = 50\cdot e^{-\frac{2}{3}} = 25,67\ V$



$E_1 = 24\,V$

$E_2 = 8\,V$

$E_3 = 24\,V$

$R_1 = 2\,\Omega$

$R_2 = 1\,\Omega$

$R_3 = 2\,\Omega$

$R_4 = 1\,\Omega$

$R_5 = 1\,\Omega$

$R_6 = 1\,\Omega$

Nodi: A, B, C → due indipendenti.
D equipotenziale a C.

Uso metodo di Maxwell ai nodi!
Pongo $V_C = 0$

$V_{AC} = V_A - V_C = V_A$

$V_{BC} = V_B - V_C = V_B$

$$\begin{array}{c} A \\ B \end{array}\begin{vmatrix} -\frac{E_1}{R_1} + 0 + 0 - \frac{E_3}{R_6} \\ \frac{E_1}{R_1} + 0 + 0 + \frac{E_2}{R_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -36 \\ 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \end{vmatrix}$$

somma correnti corto circuito entranti nel nodo (segno − se uscenti)

conduttanza cambiata di segno dei rami che collegano A e B

conduttanze del nodo

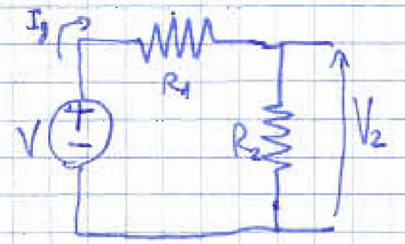
$$\begin{cases} -36 = 3V_A - V_B \\ 20 = -V_A + 3V_B \end{cases} \quad \begin{cases} V_B = 3V_A + 36 \\ 20 = -V_A + 9V_A + 108 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_A = -11\ V \\ V_B = 3\ V \end{cases}$$

oppure Kramer $\Delta = 3\cdot 3 - (-1\cdot(-1)) = 8$ $\quad V_A = \dfrac{\det\begin{vmatrix} -36 & -1 \\ 20 & 3 \end{vmatrix}}{8} = \dfrac{-108+20}{8} = -11\,V$

$$V_B = \frac{\det\begin{vmatrix} 3 & -36 \\ -1 & 20 \end{vmatrix}}{8} = \frac{60-36}{8} = 3\,V$$

SINTESI – DIMENSIONAMENTO PARTITORE



$V = 500\,V$ $\quad R_1, R_2 = ?$

$V_2 = 50\,V$

$I_g \leq 10\,mA$

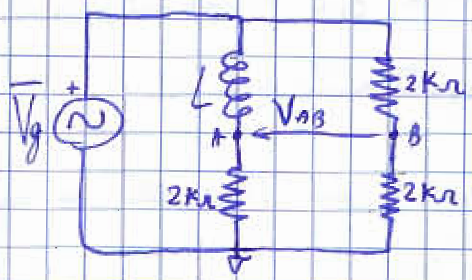
$$\begin{cases} V \cdot \dfrac{R_2}{R_1+R_2} = 50\,V \\ \dfrac{V}{R_1+R_2} = 10\,mA \end{cases}$$

1ª condizione ↓ in funzione di R_1, R_2 ↑ 2ª condizione

$$\begin{cases} \dfrac{R_2}{R_1+R_2} = \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{R_1+R_2} = \dfrac{1\cancel{0}\cdot 10^{-\cancel{3}}}{5\cancel{0}\cancel{0}} = 2\cdot 10^{-5} \end{cases}$$

$R_2 \cdot 2 \cdot 10^{-5} = 0{,}1$ $\quad R_2 = 5\cdot 10^3\,\Omega$ $\quad R_1 = \dfrac{1}{2\cdot 10^{-5}} - 5\cdot 10^3 = 5\cdot(10^4$

SINTESI - ALLUCINANTE!



$\angle \bar{V}_{AB} = \angle \bar{V}_g - 60°$ V_{AB} in ritardo di 60° su V_g

$L = ?$

$f = 50\,Hz \Rightarrow \omega = 314\ rad/s$

$$\bar{V}_{AB} = \underset{\text{funzione di trasferimento}}{\bar{H}(\omega)} \cdot \bar{V}_g \qquad \bar{V}_{AB} = \bar{V}_A - \bar{V}_B \overset{\text{partitore}}{=} \bar{V}_g \cdot \frac{2000}{2000 + j\omega L} - \bar{V}_g \cdot \frac{2000}{2000+2000} =$$

$$= \bar{V}_g \cdot \frac{4000 - 2000 - j\omega L}{2(2000 + j\omega L)} \cdot \frac{2000 - j\omega L}{2000 - j\omega L} = \bar{V}_g \cdot \underbrace{\frac{(2000 - j\omega L)^2}{2(4 \cdot 10^6 + \omega^2 L^2)}}_{H(\omega)} =$$

$$= \bar{V}_g \cdot \frac{\overbrace{4 \cdot 10^6 - \omega^2 L^2}^{A} \overbrace{- j4000\omega L}^{B}}{2 \cdot (4 \cdot 10^6 + \omega^2 L^2)} \rightarrow \text{reale} \qquad \angle \bar{V}_{AB} = \angle \bar{V}_g + \text{arctg} \frac{-4000 \cdot \omega L}{4 \cdot 10^6 - \omega^2 L^2}$$

$$\text{arctg} \frac{-4000 \cdot 314 \cdot L}{4 \cdot 10^6 - 314^2 \cdot L^2} = -60° \Rightarrow \frac{-4000 \cdot 314 \cdot L}{4 \cdot 10^6 - 314^2 L^2} = tg(-60°) = -\sqrt{3}$$

$$+4000 \cdot 314 L = +\sqrt{3}(4 \cdot 10^6 - 314^2 L^2) \qquad 1256000\, L = 4\sqrt{3} \cdot 10^6 - \sqrt{3} \cdot 98596\, L^2$$

$$\sqrt{3} \cdot 98596 L^2 + 1256000 L - 4\sqrt{3} \cdot 10^6 = 0 \qquad L = 3,67\,H \quad \text{o} \quad L = -11\,H$$

Tuttavia, L deve essere > 0,

$$\angle A + jB = -60° \quad \begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \ \forall L \end{cases} \qquad A > 0 \Rightarrow 4 \cdot 10^6 - \omega^2 L^2 > 0 \Rightarrow L < 6,37\,H$$